



一般社団法人

# 国際数理科学協会会報

No.95/2015.7

編集委員：藤井淳一（委員長）

目次

\* 年会のお知らせ

\* 寄稿

## 国際数理科学協会 2015 年度年会

年会担当理事 濱田悦生

国際数理科学協会 2015 年度年会の各分科会が、以下のように開催されますのでお知らせいたします。

### 「確率モデルと最適化」分科会研究集会

代表者：菊田健作（兵庫県立大学）

日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「不確実性環境下の意思決定モデリング」（主査 笠原正治（奈良先端科学技術大学院大学）、幹事 中西真悟（大阪工業大学））との共催

日時：2015 年 8 月 28 日（金曜日）13:00～17:30

会場：大阪工業大学うめきたナレッジセンター セミナー室 1

大阪府大阪市北区大深町 3-1 TEL：06-6359-1159

### プログラム

#### (1) 宇野 剛史（徳島大学）

講演題目：不確実性を考慮した最適立地問題の研究

概要：施設を立地する意思決定者は、提供するサービスに対する需要予測や競合施設の立地予測などに含まれる不確実性を考慮する必要がある。不確実性は事象に含まれるランダム性および意思決定における評価のあいまい性に分類される。本講演では、これらの不確実性を共に扱った最適立地問題に対する研究成果について紹介する。

#### (2) 河西 憲一（群馬大学）

講演題目：待ち時間に制約のある複数サーバ待ち行列モデルの解析

概要：ある時間以内にサービスが開始されなければ客が途中離脱することがある。このような客はサービスを逸した客であり、その割合はサービスシステムの性能を測る指標となる。本講演ではこのようなサービスシステムを想定した待ち行列モデルの解析結果について述べる。本講演は滝根哲哉先生（大阪大学）との共同研究に基づく。

(3) 佐藤 公俊 (神奈川大学)

講演題目：収益管理における最適価格の変動傾向とその要因

概要：ダイナミックプライシング (DP) は陳腐化商品の販売において利益最大化のために有効な手法である。売れ行きに応じて価格は日々変動するが、その変動傾向はまだ十分に理解されていない。本発表では、競合他社の価格調整の時期が不確実な場合の DP モデルを定式化し、他社の価格戦略が価格推移の傾向に与える影響を示す。

(4) 澤田 清 (流通科学大学)

講演題目：情報伝達長を考慮した組織構造の関係追加モデル

概要：発表者は、木構造などで表される組織構造に対して、組織全体の情報伝達効率を最大にするメンバー間の関係追加モデルを提案してきた。今回は、関係追加の情報伝達長を考慮したモデルを中心に報告する。

## 「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人：地道 正行 (関西学院大学 商学部)

連絡先：濱田 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

日時：2015年8月22日(土) 10:00-17:00

場所：大阪府立大学 中百舌鳥キャンパス A14 棟 3 階 A14-321 教室

### プログラム

#### 午前部

- 10:00-10:30 東 佑樹 (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)  
『非線形時系列モデルを用いた株価解析と高頻度データ解析の紹介』
- 10:30-11:00 竹場 夏生 (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)  
『データ同化における 4 次元変分法とその応用』
- 11:00-11:30 倉田 澄人・濱田 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)  
『BHHJ-divergence に基づいたモデル評価規準の提案と考察』
- 11:30-12:00 田辺 竜ノ介 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)  
『中央値を用いたペイズ罰則付き回帰』

#### 午後部

- 13:30-14:10 地道 正行・阪 智香 (関西学院大学 商学部)  
『中規模財務データ解析』
- 14:10-14:50 濱田 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)  
『エントロピーの非連続性について』
- 14:50-15:00 休憩
- 15:00-15:50 宮本 大輔 (東京大学 情報基盤センター)  
Users' implicit intention and cybersecurity
- 15:50-16:40 林 利治 (大阪府立大学 学術研究院 第3学群 電気情報系)  
『カルマンフィルタからアンサンブルカルマンフィルタへ』
- 16:40-17:00 総合討論

\* 寄稿

## トポロジカル量子計算とカテゴリー

藤井 淳一 (大阪教育大学 教養学科 情報科学講座)

### はじめに

最近興味を持って調べ続けている分野に **TQC(トポロジカル量子計算)** と呼ばれる分野がある。これは新しい量子コンピュータの作成方式として注目されているが、2次元特有の性質を持つ**エニオン**という粒子に基づくものである。通常の **Boson, Fermion** は、それぞれ対称・非対称テンソルで語られ、粒子の交換係数が  $\pm 1$  となるが、係数がスカラー  $e^{i\theta}$  となるものを**可換エニオン** (anyon の綴りからわかるように駄洒落である)、ユニタリ行列  $U = e^{iH}$  となるものを**非可換エニオン**といい、これが量子コンピュータを構成する新しい素子になる。このような「交換」以外にもさまざまな「粒子操作」があるが、典型的なのが粒子の合体 (消滅)・生成についての「フュージョン・スプリッティング」である:

$$a \otimes b \rightarrow \bigoplus_{x \in \mathcal{F}} N_{ab}^x x = \sum_x N_{ab}^x x$$

ここで (直) 和の意味はいずれかの粒子になることを示す。  $\mathcal{F}$  には特殊な仮想粒子として一意的な**真空粒子 0** が含まれており、他の粒子  $c$  について

**真空粒子の単位性:** 
$$c \otimes 0 \rightarrow c \leftarrow 0 \otimes c$$

という単位元的な性質を持っているものと仮定する。テンソル圏論的には **dual** に対応する、  $a \in \mathcal{F}$  の**反粒子  $\bar{a}$**  も  $\mathcal{F}$  に存在が仮定され、真空粒子からはこの2つが生成され、また真空粒子に戻る (消滅する) 変化が (唯一ではないが) 存在する:  $0 \rightarrow a \otimes \bar{a} \rightarrow 0$  (この写像の整合性は **rigidity** と呼ばれる)。例えば単純で典型的なものが**フィボナッチエニオン  $\tau$**  と呼ばれるもので、自明でないフュージョン規則は

$$\tau \otimes \tau \rightarrow 0 \oplus \tau$$

とする。このように **0** とは違って変化が一意的でない粒子  $\tau$  を「非可換エニオン」と呼ぶ。  $\tau$  については、 **0** にフュージョンする可能性があるので、  $\bar{\tau} = \tau$  である。共形場理論での基本単位「共形ブロック」に対応して、フィボナッチの場合の状態ベクトルは、以下の様なツリーで、エニオンのラベルをふって扱うことが多い (実際には  $|N\rangle$  は基本的に真空粒子となるのでほとんど使う必要がない) :

$$|0\rangle = \begin{array}{c} \tau \quad \tau \quad \tau \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \tau \\ | \\ 0 \end{array}, \quad |1\rangle = \begin{array}{c} \tau \quad \tau \quad \tau \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \tau \\ | \\ \tau \end{array}, \quad |N\rangle = \begin{array}{c} \tau \quad \tau \quad \tau \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \tau \\ | \\ 0 \end{array}$$

この理論は新しいものであるが、実は数学的・物理学的にさまざまな分野と結びついており、実際理論的には不思議なことにかかなりの部分が準備されていて、あっという間に確立した分野である。私なりに2つの解説文を書いてみたが [2, 3]、様々なしがらみも勿論興味深いものであるものの、どうしても複雑なものになってしまうため、独立した議論として捉えるときには「圏論」の言葉で語られることが多い



たとえば、左端の木から真中上の木に移行する場合には、太い線の部分に注目しているということである。

## 2. braided monoidal category.

上記のカテゴリリーに入れ替え自然同型  $\sigma : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  が加えられ、可換図式で、 $I$  の無変化性を

$$\begin{array}{ccc} A \otimes I & \xrightarrow{\sigma_{I,A}} & I \otimes A \\ \lambda_A \searrow & & \swarrow \rho_A \\ & A & \end{array}$$

で保証し（真空粒子の単位性に対応）、結合性との整合性を

hexagon axiom

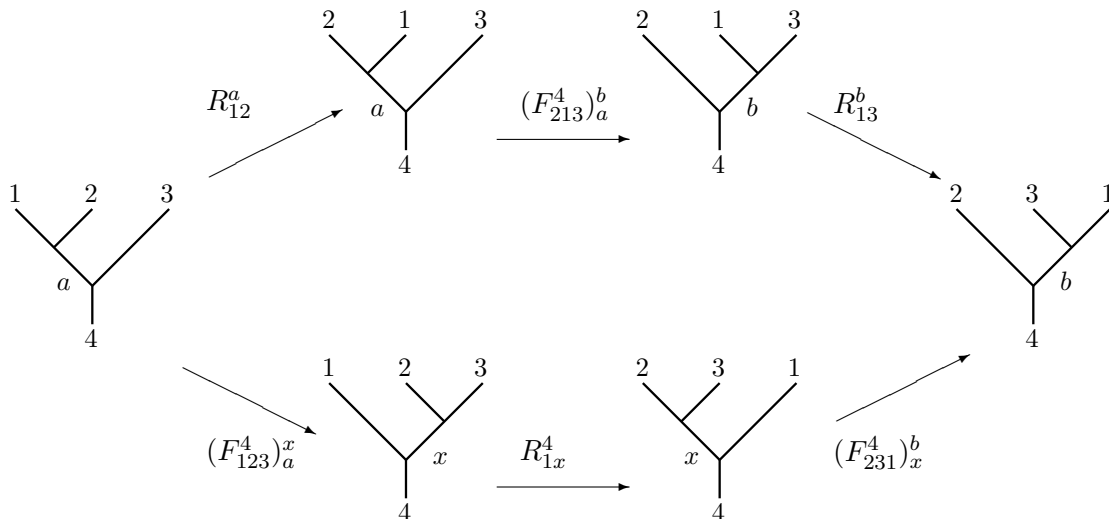
$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes (B \otimes C) & \xrightarrow{\sigma_{A,B \otimes C}} & (B \otimes C) \otimes A \\ & \nearrow & & & \searrow \\ (A \otimes B) \otimes C & & & & B \otimes (C \otimes A), \\ & \searrow & & & \nearrow \\ & & (B \otimes A) \otimes C & \xrightarrow{\alpha_{A,B;C}} & B \otimes (A \otimes C) \end{array}$$

で保証する圏のことである。

$\sigma_{a,b}$  に対応する、2つの枝を中心で半回転させて入れ替えるユニタリ変換が **R** 行列である:

$$\begin{array}{c} b \quad a \\ \diagdown \quad / \\ \circ \\ | \\ c \end{array} = R_{ab}^c \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad / \\ | \\ c \end{array}$$

というひねりを示す。また R 行列  $R_{ab}$  は、 $R_{ab}^x$  を並べた対角行列とする。「6角形公理」は TQC では以下のようなものである:



このような5角形や6角形の公理は、いわゆる Mac Lane coherence theorem から来ている [8]。実際の計算では、真空粒子をうまく使うことで、「和」を限定し、連立方程式を解くことで、対象とする粒子集合  $\mathcal{F}$  の各粒子に対応する F 行列や R 行列の値を求めることで、B 行列と呼ばれる Brading の性質を

決定することになる。これが決定すれば、TQC では応用できるようになるので、圏論的なアプローチが最もシンプルなものといえる。

### 3. ribbon category.

対象  $A$  の **dual**  $A^*$  とは、次の 2 射 ; inclusion (creation)  $i : I \rightarrow A \otimes A^*$ , evaluation (annihilation)  $e : A \otimes A^* \rightarrow I$  について以下の可換図式を満たす対象のことである (反粒子に対応) :

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{1_{A^*} \otimes i_A} & A^* \otimes A \otimes A^* \\ & \searrow 1_{A^*} & \downarrow e_A \otimes 1_{A^*} \\ & & A^* \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A \otimes 1_A} & A \otimes A^* \otimes A \\ & \searrow 1_A & \downarrow 1_A \otimes e_A \\ & & A \end{array} .$$

対象が常に dual を持つ場合、**rigid** といわれる。このとき、次の標準同型性が成り立つ :

$$\text{Hom}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}(A, C \otimes B^*), \quad \text{Hom}(A, B \otimes C) \cong \text{Hom}(B^* \otimes BA, C).$$

また対合性の保証のため、自然同型  $\gamma_A = (A \otimes e_{A^*}) \circ (A \circ \sigma_{A^* A^{**}}^{-1}) \circ (i_A \otimes A^{**}) : A^{**} \rightarrow A$  を考える。ここで、**ribbon category** とは、 $\delta_{A \otimes B} = \delta_A \otimes \delta_B$ ,  $\delta_{A^*} = (\delta_A^*)^{-1}$ ,  $\delta_I = 1$  を満たす (compatible) twist と呼ばれる射  $\delta : A \rightarrow A^{**}$  を持つ rigid braided monoidal category である。ここではさらに (**Dehn twist map**  $\theta_A = \gamma_A \circ \delta_A : A \rightarrow A$  が定められる。

Dehn twist map は TQC では、**topological spin**  $\theta_a = \theta_{\bar{a}}$  と呼ばれていて、

$$\left| \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| = \theta_a \left| \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| \quad \left( \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| = \bar{\theta}_a \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| \right)$$

というものである。単なるスケイン変形ではわかりにくい部分が、リボン (ベルトのような一定幅のもの。frame 付スケインともいう) によって、楽に示せることがある。スケインを多重化してリボンのように扱えるので、よく利用される。

たとえば、リボン  $A$  でのツイスト  $\theta_A$  は、 $A$  の 1 回転ひねりと同じである (ぐっと引っ張る変形) :

$$\theta_A \left| \begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{twisted} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{crossed} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{crossed} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right|$$

このことを使うと、下記のリボン型の fusion tree において、 $R_{BA}^C R_{AB}^C = \frac{\theta_C}{\theta_A \theta_B}$  がわかり、対応するスケインのモノドロミー関係式  $R_{ba}^c R_{ab}^c = \frac{\theta_c}{\theta_a \theta_b}$  が簡単に得られる :

$$R_{BA}^C R_{AB}^C \left| \begin{array}{c} A \quad B \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ C \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{twisted} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ C \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{crossed} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ C \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{crossed} \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ C \end{array} \right| = \frac{\theta_C}{\theta_A \theta_B} \left| \begin{array}{c} A \quad B \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ C \end{array} \right|$$

射の selfloop を持つ対象を  $0$  というが、任意の  $A, B$  について、 $A \rightarrow 0 \rightarrow B$  で唯一決まる射も  $\mathbf{0}$  という。これらがある場合に、射  $f: A \rightarrow B$  の核  $S_K$  と余核  $S_C$  を次の射として決める：

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) = k: S_K \rightarrow A; \quad f \circ k = f \circ k' = 0 \Rightarrow \exists! g: S' \rightarrow S_K, g = k' \circ k \\ \text{CoKer}(f) = u: B \rightarrow S_C; \quad u \circ f = u' \circ f = 0 \Rightarrow \exists! h: S_C \rightarrow S, h = u \circ u' \end{aligned}$$

$0$  対象を持ち  $\text{Hom}$  は可換群で、常に有限積、有限和、核、余核が存在し、任意の単射 (resp. 全射) はある核 (resp. 余核) になっている時、**abelian category** という。ここで、 $0$  と同型でない対象が **simple** とは、射  $f: B \rightarrow S$  が  $0$  か同型に限ることを言い、圏が **semisimple** とは、任意の対象が  $\bigoplus_{j \in J} N_j S_j$  ( $N_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $J$ : simple 対象の同型類) と simple 対象への有限直和分解ができることを言う (この有限直和性は **Ocneanu rigidity** と呼ばれている)。これでやっと、fusion の舞台ができた。

ここでは、 $\text{Hom}$  は有限次元 Hilbert 空間となる事を仮定し、**semisimple ribbon category** というときは、 $I$  が simple で、テンソル積は双線形、simple 対象の自己準同型環は  $\mathbb{C}$  になることを要請する。このとき、次の自然同型を得る：

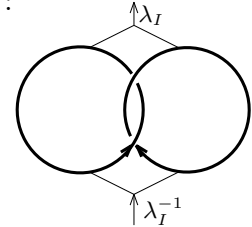
$$\begin{aligned} A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C), \quad (A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C), \\ (A \oplus B)^* \cong A^* \oplus B^*, \quad 0^* = 0. \end{aligned}$$

また、rigid semisimple ribbon category で、 $\mathbb{C}$  上線形で、各  $\text{Hom}$  は有限次元空間、 $J$  が有限個で  $S_0 = I$  が仮定されると **fusion category** と呼ばれる。これが下記の圏に先行しているのは、エニオン以前からこの数学的構造が議論されていたことによるようである。

#### 4. modular tensor category.

fusion category で、有向 Hopf リンクに対応する以下の  $S$  行列が **modularity axiom** を満たす、すなわち可逆なときを言う (ここは [11] と違って、TQC で標準的なものにする)：

$$s_{ij} = [\lambda_I(e_i \otimes e_j)(1_i \otimes \sigma_{ij} \otimes 1_j)(1_i \otimes \sigma_{ji} \otimes 1_j)(i_i \otimes i_j)\lambda_I^{-1}]_{ij}.$$



$$I \rightarrow I \otimes I \rightarrow V_i^* \otimes V_i \otimes V_j \otimes V_j^* \rightarrow V_i^* \otimes V_j \otimes V_i \otimes V_j^* \rightarrow V_i^* \otimes V_i \otimes V_j \otimes V_j^* \rightarrow V_i^* \otimes V_i^{**} \otimes V_j^{**} \otimes V_j^* \rightarrow I \otimes I \rightarrow I$$

この行列は、下で述べるようにユニタリ行列のスカラー倍になるので、TQC やほかの応用分野でも、ユニタリ行列にした方を **(modular) S 行列** もしくは、**topological S 行列** という。

これで完全に舞台はできたので、単純対象  $V_k$  についての **fusion rule** を  $V_i \otimes V_j \cong \bigoplus_{k \in J} N_{ij}^k V_k$  と決める。フュージョン係数  $N_{ij}^k = \dim(\text{Hom}(V_i \otimes V_j, V_k))$  は、フィボナッチの場合、 $N_{\tau\tau}^0 = N_{\tau\tau}^\tau = N_{0x}^x = N_{x0}^x = 1$  であとは  $0$  である。

さらに Schur 補題  $\text{Hom}(V_i, V_j) = \{0\}$  ( $i \neq j$ ) に注意して、(fusion と対称的になるが [11] に合わせて) **splitting space** を  $V_k^{ij} \cong \text{Hom}(V_k, V_i \otimes V_j)$  ( $\dim = N_{ij}^k$ ) とし、状態  $\text{Hom}(V_k, V_k) \rightarrow \text{Hom}(V_k, V_i \otimes V_j)$  を **splitting state** という。各  $i, j \in J$  について、その基底を、 $\eta \in \{1, 2, \dots, N_{ij}^k\}$  として、以下の可換図

式を満たすベクトル  $|i, j; k, \eta\rangle$  と定める:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(V_k, V_k) & \xrightarrow{|i, j; k, \eta\rangle} & \text{Hom}(V_k, V_i \otimes V_j) \\ \text{Hom}(1_{V_k}, i_\eta) \searrow & & \nearrow \cong \\ & & \text{Hom}(V_k, N_{ij}^k V_k) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc} \text{Fibonacci anyon では} & \text{Hom}(\tau, \tau) \xrightarrow{|\eta-2\rangle} & \text{Hom}(\tau, (\tau \otimes \tau) \otimes \tau) \\ \text{(便宜上 } \eta = 2, 3 \text{ として)} & \text{Hom}(1_\tau, i_\eta) \searrow & \nearrow \cong \\ & & \text{Hom}(\tau, \iota \oplus 2\tau) \end{array} \right)$$

S 行列でよく取り上げられる性質としては、

ここで、以下の系列を満たす  $f$  を **(Markov) trace**  $\text{Tr}(A)$  といい:

$$I \xrightarrow{i_A} A \otimes A^* \xrightarrow{f \otimes 1_A} A \otimes A^* \xrightarrow{\delta_A \otimes 1_{A^*}} A^{**} \otimes A^* \xrightarrow{e_{A^*}} I$$

$x \in \mathcal{F}$  の時計回りの 1 つの円に対応する  $d_x = \text{Tr}(1_x)$  を考えると、 $d_x d_y = \sum_k N_{xy}^k d_k$  が成り立つ。非負行列  $(N_a)_{ij} = N_{ai}^j$  という行列を考え、 $w = (d_x)$  というベクトルを考えると、

$$d_a w = (d_a d_x) = \left( \sum_k (N_a)_{xk} d_k \right) = N_a w$$

となることから、 $d_a$  は  $N_a$  の固有値で、共通の固有ベクトル  $w$  を持つことになり、 $N_a$  が非負行列であることと、Perron-Frobenius の定理を鑑みて、TQC では、 $d_a$  は正ベクトル  $w$  の最大固有値と解釈されることが多い (即ちすべての  $d_x$  は正数)。このとき、S 行列を  $\mathcal{D} = \sqrt{\sum_x d_x^2}$  で割ると、ユニタリとなってモジュラー S 行列が得られる。また、有名な

**Verlinde 公式:**

$$N_{ab}^c = \sum_x \frac{S_{ax} S_{bx} S_{cx}}{S_{0x}}$$

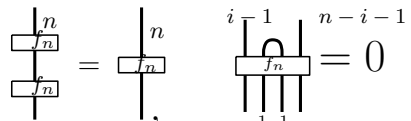
も成り立つので、そこから S 行列のユニタリ性がわかる。

## 5. TQC のモデル

ややもすると抽象的なエニオンのイメージであるが、具体性を持った「スピネットワーク」としてとらえるのが安心感があるのでまずそれを述べる。正確には Temperley-Lieb-Jones algebra と関連付けて定義されるが、ここでは正確な定義は [5, 6] 等で見えていただくことにして、大雑把なイメージを述べる (see also [3])。突き詰めて言えば、各木の枝は何本かが束になったもので、エニオンはその「本数」に対応させる。その時、(非負) 整数についての同値性

$$a + b + c : \text{偶数} \iff b + c - a, \quad c + a - b, \quad a + b - c : \text{偶数}$$

が成り立つが、この条件を満たし、式の値はすべて非負な場合を **admissible** と呼び、これを仮定する。つまり、(1, 2, 3) は admissible であるので、以下のモデルは存在するが、(2, 3, 4) は、そうでないのでそんなスピネットはない。その理由を見るために、これも正確な定義を略すが、

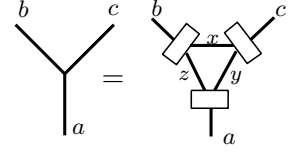
$$f_n^2 = f_n, \quad f_n U_i = U_i f_n = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$




という性質で特徴づけられ、本数の管理を厳密にしてくれる **Jones-Wenzl projection**  $f_n$  を考える。ここで、 $U_i$  は  $i$  本目から出て  $i+1$  本目に戻るような操作とする。図式的には四角形で  $f_n$  を表すことにすると、スピネットは次のように、Jones-Wenzl projection を介して、本数が厳密に管理されたものとして解釈される：

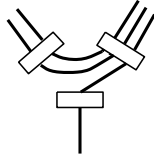
ラベル部分がエニオンでなく、(本) 数なので、本数が異なったものの fusion は、projection を介して、右のように解釈され、

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \quad y = \frac{a+c-b}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2}$$



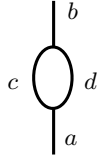
という本数  $x, y, z$  で帳尻が合うが、admissible であることは、方程式が非負で解ける同値条件であることがわかるだろう。

つまり、(1, 2, 3) は

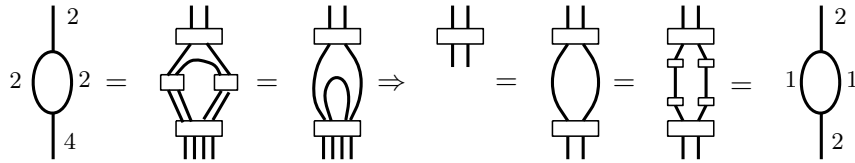


というように Jones projection でうまく管理されるが、(2, 3, 4) だと帳尻が合わない。

$U_i$  の操作を見るために、もう一つバブル型の例を挙げておけるが、右のような場合、Jones projection の監査が厳しいので、上下を収支決算だと思えば、きちんと  $a = b$  と一致していないとスピネットとして存在を許してもらえない。



$a = c = d = 2, b = 4$  も admissible なので、上下等しくなくてもいいと思われるかもしれないが、projection は、以下のように身内で不正に盤回しするような  $U_i$  関連はなくなり、右の健全な収支 (単純に「2本」と同じ) に修正される：



実際の計算では、さらに  $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  へのブラケット多項式を考え、モデルを当てはめる。例えば、右の値は量子整数  $[n]_A$  の値と、projection を挟んだ円の関係を表している。

$$\begin{aligned} \text{Tr}(1_n) &= \text{circle with a square box}^n = \Delta_n = (-1)^2 [n+1]_A \\ &= (-1)^n \frac{A^{2(n+1)} - A^{-2(n+1)}}{A^2 - A^{-2}}. \end{aligned}$$

フィボナッチモデルでは、 $\mathbf{0} = 0, \tau = 2, A = e^{\frac{3i\pi}{5}}$  と推定され、 $\Delta_4 = 0$  となることから、 $2 \otimes 2$  のフュージョン結果に 4 は現れず、0, 2 のみで閉じていることがわかる。以上のように、スピネットモデルは実在感をもって図式的な計算が進められる。

これに対して、純理論的なのが、Lie 環のモデルであるが、触れるだけにとどめておく (see [4, 1])。典型的なのが、レベル  $k$  のアフィンリー環  $\widehat{\mathfrak{su}(2)}_k$  に対する  $\widehat{\mathfrak{su}(2)}_k$  WZW (Wess-Zumino-Witten) モデルから来ている  $\mathfrak{su}(2)_k$  モデルである。これはもともと Witten が  $SU(2)$  をゲージ群とする 3次元の Chern-Simons theory と、2次元共形場理論における  $SU(2)$  WZW モデルとの対応の指摘から生まれたものである [14]。  $q = \frac{2i\pi}{k+2}$  について、 $SU(2)$  の  $q$ -deformation  $U_q(SU(2))$  を考えるとき、 $\widehat{\mathfrak{su}(2)}_k$  WZW モデルのプライマリ場は  $0, 1, \dots, k$  に対応して、 $U_q(SU(2))$  のユニタリ表現とも同一視できるので、それを TQC

の粒子と解釈することができる。フュージョン空間はすべて1次元で、フュージョン規則は  $k$ -admissible であることが要請され、

$$a \otimes b = |a - b| + (|a - b| + 2) + \cdots + \min\{a + b, 2k - a - b\}$$

となる。フィボナッチでは整数値としては前者と同じで、 $k = 3$  の場合に当たる。量子整数の定義は変わらないが、 $q = A^4$  が共役ではあるが違う値になる。しかし、様々な公式は一致して得られる。このように共形場理論とのつながりからも、冒頭のベクトル状態が共形ブロックの図式表現に対応することは、この方面に詳しい方であればわかりやすい対応ではないかと思われる。しかし、この方面に詳しくないので、この程度の解説でとどめたい (see [3])。

## おわりに

ごくごく簡単に TQC とテンソル圏との関係を眺めてみたにすぎないが、大体の感じをつかんでいただけたらと願っている。私は量子情報の専門家でもないが、所属の関係上卒論・修論指導は必要なので、今後の研究室の主要テーマになると思い、色々模索中である。そういう意味で、興味を持っていただき、ご意見がいただけたら幸いである。

## 参考文献

- [1] S.Eliëns, “Anyon Condensation”, Master Thesis in Univ. Amsterdam 2010.  
<http://dare.uva.nl/document/206602>
- [2] 藤井淳一, Fibonacci anyon におけるトポロジカル量子計算, 数学教育研究, **44**(2015) 掲載予定, 大阪教育大学数学教育講座.
- [3] 藤井淳一, TQC におけるモジュラー S 行列をめぐって, 大阪教育大学紀要、掲載予定.
- [4] L.A-Gaumé and G.Sierra, Topics in conformal field theory, preprint CERN-TH.5540/89.  
<http://cds.cern.ch/record/204721/files/CERN-TH-5540-89.pdf>
- [5] L.H.Kauffman and S.L.Lins, “Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds, Annals of Math. Stud. **134** 1994), Princeton Univ. Press.
- [6] L.H.Kauffman and S.J.Lomonaco Jr., Topological Quantum Information Theory, Proc. of Symposia in Applied Mathematics, **68**, 2010.
- [7] A.Kitaev, Anyons in an exactly solved model and beyond, Annals of Phys., **321**(2006), 2–111.
- [8] S.Mac Lane, “Categories for Working Mathematician” 2nd Ed., 1998, Springer.
- [9] M.Müger, Tensor categories: A selective guided tour, Revista de la Union Math. Argentina, **51**(2010), 95–163.  
<http://www.math.ru.nl/~mueger/PDF/18.pdf>
- [10] J.K.Pachos, “Introduction to Topological Quantum Computation”, 2012, Cambridge Univ. Press.
- [11] P.Panangaden and E.O.Paquette, A categorical presentation of quantum computation with anyons, in New Structures for Physics, Lecture Notes in Physics **813**(2011), 983–1025.  
<http://www.cs.mcgill.ca/~prakash/Pubs/MTCanyons.pdf>
- [12] I.Runkel, Algebra in braided tensor categories and conformal field theory.  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/runkel/PDF/alg.pdf>
- [13] P.Scauenburg, Hopf algebra extensions and monoidal categories, New directions in Hopf algebras, 321–381, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **43**(2002), Cambridge Univ. Press.  
<http://library.msri.org/books/Book43/files/scauenburg.pdf>
- [14] E.Witten, Quantum field theory and Jones polynomial, Commun. Math. Phys., **121**(1989), 351–399.