一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.92/2014.10

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

＊年会の報告　　＊寄稿

国際数理科学協会 2014 年度年会報告

年会担当理事 熊谷悦生

国際数理科学協会 2014 年度年会の各分科会が、以下の内容で開催されましたのでご報告いたします。

「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人: 地道 正行 (関西学院大学 商学部)

連絡先: 熊谷 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

日時: 2014 年 8 月 23 日 (土) 10:30-17:00

場所: 関西学院大学梅田キャンパス 1408 教室

プログラム

東 佑樹 (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『ARMA モデルと GARCH モデルによる時系列の予測』

概要： 本研究では、相関がある時系列データにおいて、情報量規準を用いて次数選択した ARMA モデルを用いた予測と AR モデルの区間予測を行う。点予測は観測値を条件とする条件付き期待値を、区間予測は条件付き分布を利用して行うことができる。さらに、AR-GARCH モデルを用いて分散の変動に対応できる区間予測も可能であることを説明する。

河本 直子 (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『ジャンプ拡散モデルにおける派生証券の価格付け』

概要： リスク中立価格評価法による派生証券の価格評価について説明する。株価モデルには幾何ブラウン運動とその応用であるジャンプ拡散モデルを用いており、その比較もしている。価格評価のために重要であるリスク中立測度の構築方法についても触れる。

永井 杏奈 (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『ベイズ統計学におけるノンパラメトリックな確率分布の推定』

概要： 本研究の対象は、ベイズ推定を用いたノンパラメトリックな分布推定問題である。母集団分布に対する事前情報として、共役性を持つディリクレ過程を用いるときの事後分布の導出について説明する。さらに、無情報の場合に推定結果が経験分布になることや、事後分布が一致性を持つことも解説する。

田辺 竜ノ介・熊谷 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

『ゼロ過剰モデルに対する客観事前分布の構成とその性質』

概要： 客観ベイズの立場では解析を行う際に，パラメータに対して客観事前分布を設定する必要がある．しかし，ゼロ過剰モデルと呼ばれる統計モデルのパラメータに対して客観事前分布の構成方法に関する議論は十分になされていない．そのため，本研究はゼロ過剰モデルの客観事前分布を導出し，それにまつわる性質を導き，議論するものである．

竹場 夏生 (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『状態空間モデルにおけるカルマンフィルタ・スムーザとアジョイント法の概要』

概要： データ同化とは、観測データを使って状態推定を改善することである。本発表では、2 つのデータ同化方法、カルマンフィルタ・スムーザとアジョイント法を紹介する。これらは、同化のアプローチは異なるものの、得られる状態推定値は同じになる。そのことを、バネに接続された質点の強制振動を例として、2 つの方法で得た状態推定値が、数値的な誤差を除き、同じであることを示した。

于 立洋 (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『アンサンブルカルマンフィルタの発展と応用の概観』

概要： アンサンブルカルマンフィルタ（EnKF）の発展と応用について、まず、一番簡単なデータ同化方法であるカルマンフィルタを説明し、拡張カルマンフィルタ、続いて EnKF のアルゴリズムについて解説しする。さらに、気象・海洋学における EnKF の応用と、EnKF を発展させたアンサンブル平方根フィルタとその石油貯蔵量モデルにおける応用を紹介する。

前田 真之介・地道 正行 (関西学院大学 大学院商学研究科・商学部)

『ビジュアライゼーションにおけるグラフィック特性の認知に関する考察』

概要： 抽象データ (物理的に座標を持たないデータ) のビジュアライゼーション (可視化) は人間の知覚および認知を考慮しながら適切な物理的座標と視覚構造を定義することが重要である。今回の報告では、視覚表現におけるグラフィック特性の知覚および認知についてのアンケート調査結果をもとにバブルチャートにおける円の大きさを最適化し、色相環と分光スペクトルの関係や数種類の色空間そして人間の目と脳の光を感じる構造を考慮しつつ視覚表現の色を最適化した。

倉田 澄人・熊谷 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

『情報量規準と次数選択問題について』

概要： 広く用いられている AIC をはじめとする様々な情報量規準について、各々の導出の流れや特徴について概説する。また、幾つかのモデル評価規準を、ある簡単な次数選択のシミュレーションを通して比較することで、それらの傾向や問題点を考察する。

宮本 大輔 (東京大学 情報基盤センター)

Cognitive Approach for Anti-Phishing

概要： フィッシング対策など人間を狙ったサイバー攻撃が増加している。こうした攻撃の対策を考えるにあたり、ユーザの行動を観測することで、人間の内在状態を推測する方法を検討する。これまでの実験ではユーザの視線情報や脳波などの生体情報を用い、基礎的な調査を行っておりその結果に基づいた議論を行う。

林 利治 (大阪府立大学 学術研究院 第 2 学群 電気情報系)

『自己励起型確率点過程における統計的推測の最近の発展』

概要： 本発表では、まず自己励起型確率点過程における最尤推定量の、baseline intensity が大きくなるときの漸近性質を紹介する (Chen and Hall (2013))。この結果は、証券取引の超高頻度データに応用される。また、Rasmussen (2013) によるマーク付き自己励起型点過程における Bayes 推定についても、Metropolis within Gibbs 法も紹介しながら、解説する。

「確率モデルと最適化」分科会

代表者： 菊田健作（兵庫県立大学）

日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会 「不確実性システムにおける意思決定」

（主査　木庭淳（兵庫県立大学）, 幹事　小出武（甲南大学)） との共催

日時：2014 年 9 月 13 日（土曜日）13:00～17:00

場所：大阪工業大学うめきたナレッジセンター

プログラム

１. 最小コスト全域木問題のコスト分配ルールに対する公理的アプローチ

講演者：**楠木 祥文**　(大阪大学)

概要：最小コスト全域木問題に対して、協力ゲーム理論の視点から、全域木のコストをエージェント間でどのように分配するかが議論されており、種々のコスト分配ルール、分配ルールの望ましい性質、および、それらの公理的特徴付けが提案されている。

本講演では、このようなコスト分配ルールに対する公理的アプローチを紹介する。

２．高速道路上の電気自動車充電器設置台数モデルについて — 速度変化のあるモデル —

講演者：**小柳 淳二**　(鳥取大学)

概要： 近年普及しつつある電気自動車ではあるが，高速道路を走ることになると充電器をサービスエリアなどに設置する必要がある．ガソリン車の給油よりこまめな充電が必要で，かつ充電時間も長い電気自動車に対して，各場所での充電確率などを仮定した場合の適正な充電器設置数台数導出のためのモデルについて述べる．

３．ネット人権侵害パトロールシステム

講演者： **吉冨 康成**　(京都府立大学)

概要：当研究グループで開発したシステムを用いて,「ネットいじめ」などの対策として、平成２２年度から京都府内の小・中・高等学校を対象にネットパトロールを行ってきました．そして，京都府外での運用は，企業が担当しています． 平成２５年度からは,「ネット人権侵害パトロールシステム」の開発とテスト運用を始め，平成２６年度には，京都府内を中心として，システムのテスト運用を進めています．本講演では，本システムの構成要素である，クローリング，自然言語処理，経験的手法を紹介するとともに，ネット人権侵害の実像に迫ります.

分科会「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会 （ALGI）」

代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会 （ALGI）
代表者：西澤弘毅（神奈川大学），古澤仁（鹿児島大学）

日時：2014 年 8 月 19 日（火）〜20 日（水）

場所：神奈川大学横浜キャンパス３号館２０６室

8 月 19 日（火）

卜部 夏木（東京大学）

演題：Generic Forward and Backward Simulations III: Quantitative Simulations by Matrices

梗概： We introduce notions of simulation between semiring-weighted au- tomata as models of quantitative systems. Our simulations are instances of the categorical/coalgebraic notions previously studied by Hasuo—hence soundness wrt. language inclusion comes for free—but are concretely presented as matrices that are subject to linear inequality constraints. Pervasiveness of these formalisms allows us to exploit existing algorithms in: searching for a simulation, and hence verifying quantitative correctness that is formulated as language inclusion. Transformations of automata that aid search for simulations are introduced, too. This verification workflow is implemented for the plus-times and max-plus semirings.

室屋 晃子 (東京大学)

演題 : Compiling Effectful Terms to Transducers: Prototype Implementation of Memoryful Geometry of Interaction

梗概 : We present a prototype implementation of the memoryful GoI framework of [Hoshino, Muroya and Hasuo, CSL-LICS 2014] that translates lambda terms with algebraic effects to transducers. Those transducers can be thought of as ”proof nets with memories” and are constructed in a compositional manner by means of coalgebraic component calculi. The transducers thus obtained can be simulated in our tool, too, helping us to scrutinize the step-by-step interactions that take place in higher-order effectful computation.

浦本 武雄（京都大学）

演題 : 正規言語の variety theory の現代的定式化について

梗概 : 正規言語は、正規表現によって記述できる言語であったが、一つの正規言語を記述するにも複数の正規表現があり得る。そのため、書き下した正規表現を（なんらかの基準の下で）最も良い正 規表現に最適化する問題は、正規表現によるパターンマッチの処理効率を挙げる上でも基本的な 問題となる。正規言語の variety theory はこの種の問題に対して、一定の方法論を提供するものであり、形式言語理論の中でも特 に豊かな歴史と内容を持つ理論である。近年、variety theory の研究では、Stone 双対定理を使って理論を再証明・再構築する動きがあり、本研究もそ の文脈に属している。本発表では特に、正規言語の variety theory の背景からはじめ、ガロア圏や可換代数の理論と、正規言語の variety theory がどのよう に関連していくのかについて話す。

柳澤 名由太（京都大学）

演題 : Simple Proof for FLP Impossibilities

梗概 : 分散コンピューティングの分野におけるここ 20 年間で最も目覚ましい発展として，組合せ位相幾 何学を用いた種々の不可能性証明が挙られる．しかし，得られた結果の多くは task specific なものであり，一般の task について論じたものは少ない．そこで．我々は slim task というクラスを定義し，そのクラスに属するすべてのタスクの不可能性を wait-free crash failure を伴う asynchronous layered immediate snapshot model において証明した．

倉永 崇（名古屋大学）

演題 : A Logic for Logic-free Logics

梗概 : 1 つの agent を固定したときの、その agent の idiolect の形式的な扱いを可能にする 枠組みの構築を目指している。その idiolect に属する各文は、当の agent にとって、 出力とも入力ともみなせるため、2 種類の意味論が自然に考えられ、それぞれおよそ、 表示的、動的なものに対応する。当面の目標は、この 2 つの意味論を 1 つの大きな 枠組の中に取り込むことだが、完成はしていない。今回は、まだその断片でしかない 各枠組みについて紹介する。

安部 達也（理化学研究所）

演題：メモリ一貫性モデルを考慮した半自動定理証明に向けて

梗概： メモリ一貫性モデルを考慮したプログラム検証のために無閉路有向グラフによるプログラムの表 現を提案し、共有メモリとストアバッファとを状態とする操作的意味論を与える。また、ホーア スタイルの論理を与え、その意味論に対する健全性・相対完全性を示す。最後に、この表現を採 用するにいたった動機、特に、半自動定理証明に向けての試みについて紹介する。

8 月 20 日（水）

田中 義人（九州産業大学）

演題：Semilattice models for EL

梗概： EL is a lightweight description logic, which is of importance for providing a logical foundation for ontologies. From the point of view of modal logics, the syntax of EL is a fragment of multi-modal logic which contains only top, bottom, conjunction and diamonds as its language, and its interpretations are Kripke models, which are equivalent to Boolean algebras with operators (BAOs). In this talk, we present an algebraic semantics for EL based on semilattices with operators (SLOs). In [1], Stokkermanns proved that a concept inclusion of EL is valid in the class of SLOs if and only if it is valid in every interpretations of EL, which means a natural proof system is sound and complete with respect to the interpretations of EL, as one can identify algebraic semantics with proof systems. However, it is not clear that the systems with additional axiom schemas are still complete with respect to the interpretations of EL. We approach this problem by means of algebraic models, and present some results including that the only four subvarieties of the variety of SLOs defined by equations $f(x \wedge y) = fx \wedge fy$ and $fx \leq ffx$ are embeddable in to BAOs, from which follows that the only four axiom schemas have a complete system with respect to the interpretations of EL, if the axiom schemas corresponding above equations are assumed. This is a joint work with A.Kurucz, F.Wolter and M.Zakharyaschev.

[1] Viorica Sofronie-Stokkermansmans. Locality and subsumption testing in EL and some of its extensions. In Carlos Areces and Robert Goldblatt, editors, Advances in Modal Logic 7 (AiML'08), pages 315?339. College Publications, 2008

向井 国昭（慶應義塾大学 名誉教授）

演題：文字クラスのブール代数上の最小オートマトンの構成と Prolog 限定節文法への組み込み

梗概： 梗概：正規表現から有限オートマトンを合成する方法は形式言語理論の古典としてもよく知られているが, 次の要請をすべて満たす実装はまだ無いようである (サーベイ中). (1) 正規表現は文字クラス表現が指定可能. (2) 連接および星演算の他に，ブール演算が指定できる. (3) 状態数が最小である. (4) Prolog の限定節文法の自然な拡張として，とくに，マクロ機能として組み込めること． 以上の要請をすべて満たす実装が得られたことを報告する．オートマトンを余代数として実装しているので， 終余代数定理と双模倣双関係により合成手続きの正当性は明白である．なお, 文字クラスは整数の区間のなす ブール代数としてモデル化しているが，生成されるコードは状態名としての生成述語以外は 新たな実行時ライブラリ述語は必要ない. マクロは SWI-Prolog の開発版上に実装した. 動作は安定している.

星野 直彦（京都大学）

演題：Memoryful Geometry of Interaction

梗概： Girard's Geometry of Interaction (GoI) is interaction based semantics of linear logic proofs and, via suitable translations, of functional programs in general. Its mathematical cleanness identifies essential structures in computation; moreover its use as a compilation technique from programs to state machines—"GoI implementation," so to speak—has been worked out by Mackie, Ghica and others. In this paper, we develop Abramsky's idea of resumption based GoI systematically into a generic framework that accounts for computational effects (non-determinism, probability, exception, global states, interactive I/O, etc.). The framework is categorical: Plotkin & Power's algebraic operations provide an interface to computational effects; the framework is built on the categorical axiomatization of GoI by Abramsky, Haghverdi and Scott; and, by use of the coalgebraic formalization of component calculus, we describe explicit construction of state machines as interpretations of functional programs. The resulting interpretation is shown to be sound with respect to equations between algebraic operations, as well as to Moggi's equations for the computational lambda calculus. We illustrate the construction by concrete examples.

＊寄稿

タイミングのゲームについて

大阪府立大学名誉教授
寺岡義伸（Yoshinobu Teraoka）

1　緒 言

良く知られているように、利害関係が対立するために生じた競争的な場に置かれた 2 個以上の行動主体が、どのような計画に基づいて行動すれば最適となるかを研究する数学理論が、ゲーム理論と呼ばれる学問分野である。2 個以上の行動主体が競争状態に置かされた例は、我々の日常生活のあらゆる場面で遭遇する。そしてこれら競争の問題を注意深く観察してみると、碁、将棋あるいはトランプといった屋内ゲームに類似していることに気が付く。1944 年、J. von Neumann と O. Morgenstern のよって発行された歴史的大著では、この類似性に) 注目して、この新しい理論に “ゲームの理論（Theory of Games）” と名前を付けていた。ところが、1980 年代以後、コンピュータサイエンスの著しい発展に伴い、この名称を使うと、ファミコンゲームのソフトと間違えられることが多く、何時の頃からか、この理論の呼び名も “ゲーム理論 (Game Theory)” と僅かではあるが軌道修正させられたのも面白い。

本解説では、ゲーム理論の中でも、案外に研究者の少ない “タイミングのゲーム” に関して、出発点となったモデルとその後の発展、および今後の展開を、紹介したい。

我々は、何か行動を起こす時、どの時点でその行動を始めればよいか、その時点の選び方によって、事の成否や成功の度合いの決まることが多い。株の売買、新製品の開発時期、結婚の問題、等々、我々が頻繁に出会う問題である。これら、最適なタイミングを考える問題は、銃の発射時刻を決める “決闘のゲーム” としてモデル化すると、解りやすい。

タイミングのゲーム理論は、銃を持った２人の決闘者が互いに自分と相手の射撃の技量を考えながら、どの時点で発射すれば最適となるかで表現されるクラスの問題 “決闘のゲーム” であり、ゲーム理論で扱うモデルの中でも最も対立的状況を鮮明に表現したモデルであろう。

更には、ゲーム理論の数学的側面から、タイミング（決闘）の問題を眺めると、２人の行動主体（プレーヤ）が連続体の濃度の純戦略を持つゲームであり、プレーヤの取って許された淳戦略全体の集合が無限集合となっているゲーム（無限ゲーム）の代表的な応用例となっている。

タイミングのゲーム（決闘ゲーム）の初期における貢献は 1950 年代の Dresher, Karlin, Restrepo によって代表される。その後今日に至るまで Blackwell, Danskin, Kimeldorf, Fox, Lang, Smith, Sweat, Yanovskaya, Styszynski, Radzig, Owrowski, Teraoka, Kurisu, Troylor 等による貢献が続き、益々多彩な内容となって今日まで研究対象となっている。

余談となるが、今でこそ、このようなタイトルの研究を発表しても、表面上苦情の出ることも無くなったが、20 年前までは、学会や研究集会でこの分野の研究を発表すると、必ずと言ってよいほど苦情を受けた。情報理論におけるエントロピーの概念は、大砲の砲身を削る際に発生する熱を量的に把握する研究から生まれた熱力学の概念を、情報の不確実性に借用したものであることを、記しておきたい。

2　出発点となったモデル

タイミングのゲーム（決闘ゲーム）は以下のような例で表現すると、問題点がはっきりする。

2 人の決闘者（Duelists)、PlayerI と PlayerII、が距離 2 だけおいて向き合って立ち、2 人とも単位速度で近寄る。立ち止まったり後退したりは出来ない。従って 2 人は時刻 t =0 に出発して互いに歩み寄り、もし途中で障害がなければ時刻 t =1 で出会う。2 人は手に銃を持っており、射撃の精度は精度関数（accuracy function）:

$$A_i(t) = \text{Player } i \text{ が時刻 t において発砲するとき、相手に当たる確率}$$

で表される。この関数は $A_i(0) = 0, A_i(1) = 1, A_i'(t)$ が存在して $A_i'(t).{>}0$ for $t \in [0,1]$ であると仮定する（$i = 1, 2$)。

このような状況にあっては、両決闘者共なるべく発砲時刻を遅らせたい。しかし遅すぎると、相手が先に発砲してやられてしまうかも知れない。相手を仕留める確率と相手から仕留められるかを考えた上で、自分にとっての最適な発砲時刻を決定するのがこの問題の目的である。

ここで、プレーヤにとっても利得を、相手を倒せば＋１、倒されればー１、その他の場合は 0

と、すなわち 0 和と、仮定する。この仮定は、自分が生き残る確率を最大にしようとする仮定と同じ内容を与える。

ところで、この種のゲームにおいては、プレーヤにとって利用できる情報について、次のような特徴的な型が考えられる。一方の決闘者が発砲したとき、瞬間にその音が相手に聞こえるとき、すなわち、一方のプレーヤが行動を取ったとき、そのことが瞬間に情報として相手プレーヤに伝えられるとき、彼は noisy bullet を持っていると言う。反対に、銃に消音装置がついていて、その銃を持っている決闘者が発砲してもそのことが相手に知られない、すなわちそのプレーヤの情報防護がしっかりしていて、彼が既に行動とったのか、未だ行動していないかの情報が相手プレーヤに伝えられないとき、彼は silent bullet を持っていると言う。決闘ゲームにおいて silent bullet と noisy duel の間に本質的な違いがあることを指摘したのは Blackwell である。

Noisy Duel　この場合、両者とも互いに、相手が先に発射して成功すれば自分はそれまでである。もし相手が失敗すれば、そのことを情報として知ることができるので、その時刻より後で最も有利となる時刻すなわち $t = 1$ まで発射を控え、$t = 1$ で確実に相手を仕留めることが出来ることとなる。従って、PlayerI の純戦略は $x \in [0,1]$ であり、この意味は、I は予め点 $x \in [0,1]$ を決めておき、もし II が時刻 $y < x$ で発射して失敗すれば点 1 で発射し、II が x より前に発射しなければ点 x で発射する、という計画を立てることである。PlayerI が得ることが出来る期待利得 $M(x,y)$ は

$$M(x,y) = \begin{cases} 2A_1(x) - 1, & x < y \\ A_1(x) - A_2(y), & x = y \\ 1 - 2A_2(y), & y < x \end{cases} . \tag{1}$$

となる。

定理 1. 方程式 $A_1(t) + A_2(t) = 1$ の区間 [0,1] における唯一根を t_0 とする。そうすると t_0 の、組 (t_0, t_0) は（1）で与えられる２人０和ゲームの鞍点となる。

Silent Duel 次に、両決闘者とも silent bullet を持っている場合を考察しよう。この場合両者とも [0,1] の各時点において、互いにお相手が未だ発砲していないのか、既に発砲してしまった後なのかが、判らないのであるから、PlayerI と II の純戦略を、単純に、ぞれぞれの発射時刻 $x \in [0,1]$、$y \in [0,1]$ と設定するのが自然である。そうすると、PlayerI への期待利得 $M(x,y)$ は

$$M(x,y) = \begin{cases} A_1(x) - A_2(y) + A_1(x)A_2(y), & x < y \\ A_1(x) - A_2(y), & x = y \\ A_1(x) - A_2(y) - A_1(x)A_2(y), & x > y \end{cases} \tag{2}$$

となる。この利得関数を持つ２人０和ゲームにおいては、定理１のような純戦略の中で最適戦略、すなわち鞍点は存在しない。

定理 2. a_1,a_2 をそれぞれ、方程式

$$1 + \frac{1}{A_2(a)} = \int_a^1 \frac{A_2^{'}(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2} dt \ ; \qquad 1 + \frac{1}{A_1(a)} = \int_a^1 \frac{A_1^{'}(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2} dt$$

の 区間 (0,1) 内における唯１つの根とし、$a = \max(a_1, a_2)$ と置く。そうすると PlayerI の最適混合戦略 $F^0(x)$ と PlayerII の最適混合戦略 $G^0(y)$ は次のように与えられる。

$$F^0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{k_1 A_2^{'}(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2} dt + \alpha I_1(x), & a \le x \le 1; \end{cases}$$

$$G^0(y) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ \displaystyle\int_a^y \frac{k_2 A_1^{'}(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2} dt + \beta I_1(y), & a \le x \le 1. \end{cases}$$

ここに、$I_1(z)$ は点 $z = 1$ における unit-step function であり、α と β は

$$\alpha \left\{ \begin{array}{c} = \\ = \\ > \end{array} \right\} 0, \quad \beta \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ = \end{array} \right\} 0 \quad if \quad a = \left\{ \begin{array}{c} a_1 > a_2 \\ a_1 = a_2 \\ a_2 > a_1 \end{array} \right\}$$

で与えられる。また、k_1 と k_2 はそれぞれ α と β を含めて

$$\frac{1}{k_1} = \left\{ 1 + \frac{1}{A_2(a)} \right\} / (1+\alpha) = \int_a^1 \frac{A_2^{'}(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2} dt / (1-\alpha) \ ;$$

$$\frac{1}{k_{21}} = \left\{ 1 + \frac{1}{A_1(a)} \right\} / (1+\beta) = \int_a^1 \frac{A_1^{'}(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2} dt / (1-\beta)$$

により計算できる。この時、ゲームの値 v^0 は

$$v^0 = \begin{cases} \{1 - 3A_2(a)\} / A_2(a) \displaystyle\int_a^1 \frac{A_2^{'}(t)}{A_1(t)\{A_2(t)\}^2}, \\ -\{1 - 3A_1(a)\} / A_1(a) \displaystyle\int_a^1 \frac{A_1^{'}(t)}{A_2(t)\{A_1(t)\}^2} dt, \end{cases} \quad \text{if} \quad a = \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ \\ a_2 \end{array} \right\}$$

となる。

<u>**Silent-Noisy Duel**</u>　ここでは、PlayerI は silent bullet を持っており、PlayerII は noisy bullet を持っているところの情報構造において非対称となる場合を考える。この２人０和ゲームに対しては、随分長い間、最も簡単な $A_1(t) = A_2(t) = t$ の場合のみが解かれただけだった。

$$M(x,y) = \begin{cases} x - y + xy, & x < y \\ x - y, & x = y \\ 1 - 2y, & x > y. \end{cases} \tag{3}$$

定理 3. $a = \sqrt{6} - 2 \quad (\cong 0.45)$ とおく。そうすると、上記の利得関数（3）に対して、PlayerI の最適戦略は確率密度関数

$$f^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < a \\ \sqrt{2}a(x^2 + 2x - 1)^{-3/2}, & a < x < 1 \end{cases}$$

で与えられ、PlayerII の最適戦略は累積分布関数

$$G^*(y) = \frac{a}{2+a} \left\{ \frac{2}{a} \int_0^y f^*(t)dt + I_1(y) \right\}$$

で表される。このゲームに対してのゲームの値は $v^* = 1 - 2a = 5 - \sqrt{6}$ ($\cong 0.101$)。

この結果によると、点 1 に mass を残す Player は、noisy player のみである。

3　弾丸の数や精度関数の一般化

前節で紹介した決闘ゲームの自然な拡張は、弾丸の数や精度関数の一般化であろう。

<u>**Silent Duel の一般化**</u>　Restrepo は、1957 年、両決闘者とも silent bullets を所有しており、PlayerI は m 発の弾丸を持ち、II は n 発の弾丸を持ったモデルを提案し、一般精度関数に対して、その解を漸化的な形で導いた。Restrepo のモデルを紹介する。

PlayerI の純戦略を $x = (x_1, \cdots, x_m)$ とし、PlayerII の純戦略を $y = (y_1, \cdots, y_n)$、ただし $x_1 \le \cdots \le x_m$，　$y_1 \le \cdots \le y_n$、とする。

そうすると I への期待利得 $M(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n)$ は

$$M(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n) = -\begin{cases} A_1(x_1) + \{1 - A_1(x_1)\} M(x_2, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n), & x_1 < y_1 \\ -A_2(y_1) + \{1 - A_2(y_1)\} M(x_1, \cdots, x_m; y_2, \cdots, y_n), & x_1 > y_1, \end{cases}$$

ただし $x_1 = y_1$ の時は、上記の関係式右辺の上下２つの項の平均とする。

で与えられる。そうして PlayerI ,II の混合戦略をそれぞれ $F(x)$, $G(y)$ で表し、次のように想定する：

$$F(x) = \prod_{i=1}^{m} F_i(x_i)\ ; \qquad G(y) = \prod_{j=1}^{n} G_j(y_j)$$

ただし、$F_i(x_i)$ は 区間 $[a_i, a_{i+1}]$ 上の *cdf* であり、$i < m$ に対しては *pdf* $f_i(x_i)$ のみで、$i = m$ に対しては $[a_m, a_{m+1})$ 上の density part$f_m(x_m)$ と点 a_{m+1} での可能な mass$\alpha \ge 0$ とで構成される。同様に $G_j(y_j)$ は区間 $[b_j, b_{j+1}]$ 上の *cdf* であり、$j < n$ に対しては $[b_j, b_{j+1})$ 上の *pdf* $g_j(y_j)$ のみで、$j = n$ に

対しては $[b_n, b_{n+1})$ 上の density part$g_n(y_n)$ と点 b_{n+1} での可能な mass$\beta \geq 0$ とで構成される。ここに、$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m = 1$; $0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n = 1$ であり、さらに $a_{m+1} = b_{n+1} = 1$ とする。

Restrepo は上記のようなクラスの混合戦略の中から、Single-bullet のモデルで得られた最適混合戦略と相似な *cdf* を各 $F_i(x_i)$ や $G_j(y_j)$ に条件を満たすように当てはめて、つなぎあわせることで、最適戦略を導く漸化関係式を与えた。そこでは、動的計画法の考え方が使われている。

Noisy Duel の一般化　Silent duels に比べて noisy duel の一般化—プレーヤ I は m 発弾丸を持ち、II は n 発弾丸を持ち、精度関数は一般の場合—は格段に難しい。それは silent duel においては、両決闘者とも、相手の行動が情報として知らされないため、各プレーヤの発射時刻の設定は [0,1] のどに時点においても安定しており（修正するためのデータが得られない）、これに伴い、純戦略ならびに混合戦略の設定も同じ形式の繰り返しで表現できる単純な設定ですんだ。これに比べて noisy duel にあっては、両プレーヤとも自分がやられていない限り、自分と相手の残っている弾丸の数が常に学習できるため、これに応じて発射時刻の変更を組み込んだ形式の純戦略および混合戦略を設定しなければならない。このため Karlin の書物では、両者とも一発ずつ弾丸を持ち精度関数は一般の場合か、I は m 発の弾丸を持ち II は n 発を持っているが精度関数は等しい、すなわち $A_1(t) = A_t(t) = t$ の場合だけが紹介されており、その後 10 年間、何ら新しい報告は無かった。しかし、1969 年ついに Fox and Kimeldorf は、純戦略の系列とゲームの値の系列に動的計画的考え方を導入し、ε-optimal の意味での完全な解決を与えた。

PlayerI は m 発 noisy bullets を、II は n 発 noisy bullets を持っているとする。そこで、このゲームを G_{mn} とおくと、$G_{m,n-1}$ と $G_{m-1,n}$ の解が求まると再帰的関係により G_{mn} が解ける。したがって次の結果を得る。

適当な $\{t_{ij};\ i,j = 1,2,\cdots\}$ と唯一つの $\{v_{il};\ i,j = 1,2,\cdots\}$ が存在して

$$v_{ij} = A_1(t_{ij}) + \{1 - A_1(t_{ij})\}v_{i-1,j} = -A_2(t_{ij}) + \{1 - A_{ij}(t_{ij})\}v_{i,j-1},$$

$$\text{ここに、} v_{i0} = 1 \ \text{ for } \ i > 0 \ \text{ and } \ v_{0j} = -1 \ \text{ for } \ j > 0.$$

が成立する。これより任意の $m,\ n$ に対してゲーム G_{mn} は値 v_{mn} を持つ。

また、時刻 $\{t_{ij}\}$ は

$$\prod_{i=1}^{m}\{1 - A_1(t_{im})\} + \prod_{j=1}^{n}\{1 - A_2(t_{mj})\} = \quad 1$$

より順次決定される。すなわち、もし両決闘者がともに最適に振舞うならば、G_{mn} における最初の発射時刻は t_{mn} とすべきであり、さらに

$$A_1(t_{mn}) - A_2(t_{mn}) + [1 - A_1(t_{mn})][1 - A_2(t_{mn})]v_{m-1,n-1} \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ \leq \end{array} \right\} \ v_{mn} \implies \left\{ \begin{array}{c} \text{Player I} \\ \text{Player II} \end{array} \right\} \text{が発射}$$

することとなる。

Silent-Noisy Duel の一般化　前節でも解説したように、両プレーヤとも弾丸を一発ずつ所有しており、精度関数が一般のゲームへの拡張は、そんなに簡単でなく、さらにモデルを複雑にした 1974 年の Styszynski ならびに 1981 年の Teraoka のモデルからの帰結を待たなければならなかった。次に、その結果を示す。

下記のような利得関数を持つ 2 人 0 和ゲームを考える：

$$M(x,y)=\begin{cases} A_1(x)-A_2(y)+A_1(x)A_2(y), & x<y \\ A_1(x)-A_2(y), & x=y \\ 1-2A_2(y), & x>y. \end{cases}$$

定理 4. いま、t_0 を方程式 $A_1(t)A_2(t)+A_1(t)+A_2(t)=1$ の区間 [0,1] における唯一根とし、$h_i(t)$ を

$$h_i(t)=A'_{3-i}/\{A_1(t)A_2(t)+A_1(t)+A_2(t)-1\} \quad \text{for } t\in(t_0{,}1),\quad i=1,\ 2$$

とする。そこで、a を方程式

$$\int_a^1 h_1(t)\exp[-\int_a^t \{1+A_1(s)\}\, h_1(s)ds]dt=1/2$$

の区間 $(t_0{,}1)$ における唯一根とする。そうすると、上記の２人０和ゲームに対して、PlayerI の最適混合戦略 $F^*(x)$ と PlayerII の最適混合戦略 $G^*(y)$ は以下のように与えられる。

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<a \\ 2\displaystyle\int_a^x h_1(t)\exp\left[\int_a^t \{1+A_1(s)\}h_1(s)ds\right]dt, & a\le x\le 1 \end{cases};$$

$$G^*(y)=\begin{cases} 0, & 0\le y<a \\ \beta\left(2\displaystyle\int_a^y h_2(t)\exp\left[+\int_t^1 \{1+A_2(s)\}h_2(s)ds\right]dt+I_1(y)\right), & a\le y\le 1, \end{cases}$$

ここに $I_1(y)$ は $y=1$ における unit-step function であり、mass partβ は

$$\beta=1/\left(1+2\int_a^1 h_2(t)\exp\left[+\int_t^1 \{1+A_2(s)\}\, h_2(s)ds\right]dt\right)>0.$$

従って、対応するゲームの値 v^* は $v^*=1-2A_2(a)$ となる。

この結果によると、点１に mass part を残すプレーヤは両決闘者の精度関数が何であっても PlayerII、すなわち、noisy player のみである。これは PlayerI （silent player）の純戦略には相手が（自分の予定時刻より前に）発射したことがわかれば点１まで待つ計画が、一般精度関数にまで拡張しても、影響をもつことを意味する。そして $G^*(y)$ の形を眺めると density part の係数に mass partβ が入っている。このため、定理２の証明と同じ方法では、上手く分布関数の条件を満たすような a と β を定めることが出来ないからである。Styszynski は m-silent 対 1-noisy の解が案外に容易に求まることを見つけ、その特別な場合として本質的に定理３とよく似た結果を示唆した。Teraoka は両決闘者が所有する弾丸の数が２変量ベルヌーイ分布に従う確率変数であるモデルを提案して解を求め、その際、両者が弾丸を所有する確率が共に１へ近づけたときの極限として定理４を導いた。この silent-noisy duel の一般化は、大きく未開拓であり、現在でも open となっている。特別な問題に対して、Owlowski, Radzig, Kurisu, Troylor 等の研究者が地道な、しかし興味ある結果を出しているが、省略する。弾丸の数の一般化は、その極限として連続時刻での発砲へのモデル化を生むが、今回はこれも省略する。

4　今後の方向

先にも述べたように、決闘のゲーム理論は、我々の日常生活の中で出会う最適なタイミングを考える問題のモデル化に過ぎないが、その表現が余りにも生々しい。最近はそうでもなくなってきたが、20 年以上前までは、研究発表会で発表する度に「そんな研究は止めろ」といった意味の質問をされた思い出がある。特に、我が国にゲーム理論を紹介されたとされる鈴木光男先生からは「ゲーム理論は只でさえ軍事研究に加担していると見られているのに、そんな研究をやってもらっては困る $\cdots$ 」と露骨に苦情を聞かされた。私は意固地になって研究のスタンスを変えなかったが、最適なタイミングを考えるゲームとして、例えば、株の売買や新製品の研究開発と言った生々しくないモデルで表現する必要もあるのではないかと思われる。

また、最適なタイミングを考える問題として、我が国では、世界をリードしておられる多くの研究者を輩出している最適停止問題との関連を研究する分野は大きく未開拓となっている。

最後に、決闘をモデルとして考えるにしても、これまで研究されたモデルの全ては、各プレーヤは、自分の制度関数だけでなく、対立者の精度関数も既知であり、更に、それらが両プレーヤに共通と仮定している。多くの場合、自分の精度関数は把握出来ても、対立者の精度関数は推測の域を越えないと考えるのが自然であろう。互いに、対立者の技量を高く評価した時の精度関数と低く評価した時の精度関数を仮定し、合理的な平衡戦略を提案する方法が考えられる。

この分野は、見方を変えるとまだまだ発展できる分野である。

参考文献

[1] Baston and Gernaev, A. "Teraoka type silent non-zero sum game" *Journal of Optimization Theory and Applications*, 87, 539–552, 1995.

[2] Blackwell, D., and Gershik, A: *Theory of Games and Statistical Decisions*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1954.

[3] Dresher, R.: *Games of Strategy*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliff, New York, 1961.

[4] Fox, M., and Kimeldorf; G. "Noisy duels", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17 353–361. 1969.

[5] Karlin, S.: *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*, Vol.II, Addison-Weslay, Massachusetts, 1959.

[6] Kurisu T.: "On a noisy-silent versus silent duel with equal accuracy functions", Journal of Optimization Theory and Applications, 40, 85–103, 1983.

[7] Kurisu T. : "On a duel with time lag and arbitrary accuracy functions" , International Journal of Game Theory, 19, 375–405, 1991.

[8] Kurisu T. : "A one-noisy-versus-two-silent-duel with arbitrary accuracy functions under arbitrary motion", Scientiae mathematicae Japonicae, 56, 547–566, 2002

[9] Lang, J. R. and Kimeldorf, G."Duels with continuous firing", Management Sciences, 22, 470–476, 1975.

[10] Lang, J. R. and Kimeldorf, G. "Silent duels with nondiscrete firing", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 31, 99–110, 1976.

[11] Restrepo, R., "Tactical problems involving several actions", *Contributions to the Theory of Games*, III (*Annals of Mathematics Studies* 39), 313–335, 1957.

[12] Styszynski, A., "An n-silent-vs.-noisy duel with arbitrary accuracy functions", *Zastosowania Matematyki*, 14, 205–225, 1974.

[13] Sweat, C. W. "A single-shot noisy duel with detection uncertainty", *Operations Research*, 19, 170–181, 1972.

[14] Teraoka, Y. "Noisy duel with uncertain existence on the shot" *International Journal of Game Theory*, 5, 239–249, 1976.

[15] Teraoka, Y. "A two-person game of timing with random arrival time of the object" *Mathematica Japonica*, 24, 427–438, 1979.

[16] Teraoka, Y. "Silent-noisy duel with uncertain existence on the shot" *Bulletin of Mathematical Statistic*s 19, 1981.

[17] Teraoka, Y. "A two person games of timing with random termination" *Journal of Optimization Theory and Applications*, 40, 379–396, 1983.

[18] Teraoka, Y. "A silent-noisy marksmanship contest with random termination" *Journal of Optimization Theory and Applications*, 49, 477–487, 1986.

[19] Yanovskaya, Y. B., "Duel-type games with continuous firing", *Engineering Cybernetics* 7, 15–18, 1969.