一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.91/2014.7

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

国際数理科学協会 2014 年度年会

年会担当理事 熊谷悦生

国際数理科学協会 2014 年度年会の各分科会が、以下のように開催されますのでお知らせいたします。

「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会

世話人: 地道 正行 (関西学院大学 商学部)
連絡先: 熊谷 悦生 (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

日時: 2014 年 8 月 23 日 (土) 10:30-17:00
場所: 関西学院大学梅田キャンパス 1408 教室

プログラム

午前の部

10:30-10:50 **東 佑樹** (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)
『ARMA モデルと GARCH モデルによる時系列の予測』

10:50-11:20 **河本 直子** (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)
『ジャンプ拡散モデルにおける派生証券の価格付け』

11:20-11:50 **永井 杏奈** (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)
『ベイズ統計学におけるノンパラメトリックな確率分布の推定』

11:50-12:20 **田辺 竜ノ介・熊谷 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)
『ゼロ過剰モデルに対する客観事前分布の構成とその性質』

午後の部

13:30-13:50 **竹場 夏生** (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『状態空間モデルにおけるカルマンフィルタ・スムーザとアジョイント法の概要』

13:50-14:20 **于 立洋** (大阪府立大学 大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『アンサンブルカルマンフィルタの発展と応用の概観』

14:20-14:50 **前田 真之介・地道 正行** (関西学院大学 大学院商学研究科・商学部)

『ビジュアライゼーションにおけるグラフィック特性の認知に関する考察』

14:50-15:20 **倉田 澄人・熊谷 悦生** (大阪大学 大学院基礎工学研究科)

『情報量規準と次数選択問題について』

15:20-15:30 休憩

15:30-16:10 **宮本 大輔** (東京大学 情報基盤センター)

Cognitive Approach for Anti-Phishing

16:10-16:50 **林 利治** (大阪府立大学 学術研究院 第 2 学群 電気情報系)

『自己励起型確率点過程における統計的推測の最近の発展』

「確率モデルと最適化」分科会

代表者： 菊田健作（兵庫県立大学）

日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会 「不確実性システムにおける意思決定」

（主査　木庭淳（兵庫県立大学），幹事　小出武（甲南大学）） との共催

日時：2014 年 9 月 13 日（土曜日）13:00～17:00

場所：大阪工業大学うめきたナレッジセンター

プログラム

１. 最小コスト全域木問題のコスト分配ルールに対する公理的アプローチ

講演者：**楠木 祥文**　大阪大学

概要：最小コスト全域木問題に対して、協力ゲーム理論の視点から、全域木のコストをエージェント間でどのように分配するかが議論されており、種々のコスト分配ルール、分配ルールの望ましい性質、および、それらの公理的特徴付けが提案されている。
本講演では、このようなコスト分配ルールに対する公理的アプローチを紹介する。

２. 高速道路上の電気自動車充電器設置台数モデルについて — 速度変化のあるモデル —

講演者：**小柳 淳二**　鳥取大学

概要： 近年普及しつつある電気自動車ではあるが，高速道路を走ることになると充電器をサービスエリアなどに設置する必要がある．ガソリン車の給油よりこまめな充電が必要で，かつ充電時間も長い電気自動車に対して，各場所での充電確率などを仮定した場合の適正な充電器設置数台数導出のためのモデルについて述べる．

３．ネット人権侵害パトロールシステム

講演者： **吉冨 康成**　京都府立大学

概要：当研究グループで開発したシステムを用いて,「ネットいじめ」などの対策として、平成２２年度から京都府内の小・中・高等学校を対象にネットパトロールを行ってきました．そして，京都府外での運用は，企業が担当しています． 平成２５年度からは,「ネット人権侵害パトロールシステム」の開発とテスト運用を始め，平成２６年度には，京都府内を中心として，システムのテスト運用を進めています．本講演では，本システムの構成要素である，クローリング，自然言語処理，経験的手法を紹介するとともに，ネット人権侵害の実像に迫ります.

分科会「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会 （ALGI)」

代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会 （ALGI)
代表者：西澤弘毅（神奈川大学），古澤仁（鹿児島大学)

日時：2014 年 8 月 19 日（火）〜20 日（水）

場所：神奈川大学横浜キャンパス３号館２０６室

プログラム（発表者および簡単な要旨)「代数, 論理, 幾何と情報科学研究集会 （ALGI)」のＨＰ

http://sakura.math.kyushu-u.ac.jp/algi/

に掲載予定.

＊寄稿

カントロヴィッチ不等式から見た作用素幾何平均

瀬尾　祐貴　（大阪教育大学）

1　はじめに

本稿の目的は、最近、研究が活発に進んでいる n 変数版の作用素幾何平均について、Kantorovich 不等式にその源流を持つ「逆不等式」の観点から、その非可換構造の特徴を考察することにあります。ヒルベルト空間上の正作用素 A と B に対して、その作用素幾何平均は、$A \sharp B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$ で定義され、幾何平均の持つべき多くの性質を満たします。例えば、A と B が可換であれば、$A \sharp B = \sqrt{AB}$ になり、単調性：$A \le C, B \le D$ ならば、$A \sharp B \le C \sharp D$ や、トランスフォーマー不等式：任意の作用素 T に対して、$T^*(A \sharp B)T \le (T^*AT) \sharp (T^*BT)$ などが成り立ちます。また、荷重作用素幾何平均は、$\alpha \in [0,1]$ に対して、$A \sharp_\alpha B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\alpha}A^{1/2}$ で定義され、同様な性質を満たすことがわかっています。その n 変数版の幾何平均の定式化は、これまで作用素論の中で大きな課題でした。従来、算術べき平均の極限として定式化された chaotic 幾何平均がありましたが、これは、残念ながら幾何平均として持つべき性質を満たさないということで、作用素論の中であまり重要視されてきませんでした。それが、2005 年、安藤-Li-Mathias[2] によって、初めて n 変数版の幾何平均が定式化され、2 個の場合とほぼ同様な性質をもつことが示されました。さらに、2006 年、Bhatia-Holbrook[5] は、Cartan の手法を参考に、与えられた正定値行列との距離の和が最小になる行列として、新しい幾何平均を提案しました。その後、Lim-Pálfia[19]、Lawson-Lim[18] により、Karcher Equation を満たす唯一解として Karcher 幾何平均を d 次正方行列及びヒルベルト空間上の作用素に対して定義し、安藤-Li-Mathias による幾何平均と同じく、幾何平均として持つべき多くの性質を満たすことを示しました。一般の作用素に対して定義できることがわかったことは、今後の研究のさらなる進展が期待できる段階に入ったとも言えます。

ここでは、この 3 つの n 変数版作用素幾何平均を「逆不等式」の観点から捉えることによって、その非可換構造の比較・検討を行いたいと思います。

2　Kantorovich 不等式

ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素 A が、自己共役とは、すべてのベクトル $x \in H$ に対して、その内積 $\langle Ax, x\rangle$ が実数であるときを言います。また、A が正作用素とは、すべてのベクトル $x \in H$ に対して、$\langle Ax, x\rangle \ge 0$ が成り立つときを言い, $A \ge 0$ とかきます。A が可逆な正作用素ならば、$A > 0$ とかきます。 2 つの自己共役作用素 A と B が、$A - B \ge 0$ のとき、作用素順序 $A \ge B$ を持つといいます。また、定数 $m < M$ と任意のベクトル x に対して $m\langle x, x\rangle \le \langle Ax, x\rangle \le M\langle x, x\rangle$ が成り立つとき、$mI \le A \le MI$ とかくことにします。作用素についての参考文献としては、[13] をあげておきます。

まず、簡単に、Kantorovich 不等式を巡る数学史的な流れから、Jensen 不等式をもとに逆不等式の見方・考え方を概説します。1959 年、Greub-Rheinboldt は、Kantorovich 不等式の一般化として次の定理を紹介しました。

Theorem 2.1 (Greub-Rheinboldt [17]). ヒルベルト空間 H 上の正作用素 A が、正の定数 $m < M$ に対して、$mI \le A \le MI$ を満たすとき、

$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\langle x, x\rangle^2 \tag{2.1}$$

がすべてのベクトル $x \in H$ に対して成り立つ。

この不等式は、作用素版の Cauchy の不等式 $1 \le \langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle$ の上限の評価を与えていると考えられます。この Greub-Rheinboldt の結果を端緒として、「逆不等式」の見方が作用素論の中から出てきました。Kantorovich は、(2.1) の不等式を示すのに、次の補題 [16] とスペクトル定理を用いました。

Lemma 2.2 (Kantorovich [16]). 実数列 $\{\gamma_k\}$ が、$0 < m \le \gamma_k \le M$ を満たしているとき、別の実数列 $\{\xi_k\} \in l^2$ に対して、不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \xi_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k}\xi_k^2\right) \le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \xi^2\right]^2$$

が成り立つ。

これは、無限級数の形でかかれていますが、本質は有限部分です。さらに、上限の係数は condition number を用いて記述されていますが、Greub-Rheinboldt はそれを次のように簡単にまとめました。n 個の正の実数列 $\{a_k\}$ が、$0 < m \le a_k \le M$ を満たしているとき、

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

が成り立つ。右辺の評価は、印象的で大変美しい式になっています。この結果そのものは、1914 年に Schweitzer[23] が証明をしているようです。

この定理 2.1 は *Kantorovich* 不等式と言われています。(もう少し歴史をみると、Kantorovich の結果は、1948 年ですが、Frucht[7] は 1943 年に、行列の場合に結果を導いていますので、この結果を Kantorovich-Frucht の不等式という人もいます。) Greub-Rheinboldt は、Kantorovich のスペクトル定理を用いた証明が気に入らなかったらしく、それを用いない初等的な、しかし、長く複雑な証明をしました。いずれにしても、この部分 (2.1) を取り出した Greub-Rheinboldt の功績は大きいと言わざるを得ません。実際、この Greub-Rheinboldt の定式化から、定理 2.1 の一般化や、もっと簡明な証明方法の開発など多くの研究が発表されることになったからです。例えば、発表のわずか 1 年後の 1960 年に、中村 [22] は、関数 $f(t) = t^{-1}$ の凸性を用いた非常に簡明な証明を与えました。

Theorem 2.3 (中村 [22]). $0 < m < M$ とする。$[m, M]$ 上の正の *Stieltjes* 測度 μ で、$\| \mu \| = 1$ を満たすとき、

$$\int_m^M t d\mu(t) \cdot \int_m^M \frac{1}{t} d\mu(t) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}$$

が成り立つ。

実際、凸関数 $y = t^{-1}$ の割線を評価することで上式の評価を求めています。つまり、2 点 $(m, 1/m)$ と $(M, 1/M)$ を結ぶ直線を $y = g(t)$ とおくと、$\int_m^M t^{-1} d\mu(t) \le \int_m^M g(t) d\mu(t) = (M+m)/2Mm$ が成り立つ。この両辺に $\int_m^M t d\mu(t) = (M+m)/2$ をかけると、求める結果がわかります。これまでの流れから、この定数 $\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ は *Kantorovich* 定数と呼ぶことに異論はないと思います。しかも、この証明方法を見れば、Kantorovich 定数は、正作用素のスペクトルの最小値 m と最大値 M の算術平均 ÷ 調和平均と見ることができます。

$$\frac{(M+m)^2}{4Mm} = \frac{\frac{M+m}{2}}{\left(\frac{M^{-1}+m^{-1}}{2}\right)^{-1}}$$

定理 2.3 の証明は、現在 Mond-Pečarić method と呼ばれている Kantorovich 型不等式を導くときの基本原理の原型を与えていることがわかると思います [15, 13]。

1993 年、Mond-Pečarić は、全く新しい見方をこの Kantorovich 不等式に対して提案をしました。それが、「逆不等式」を世に広める第一歩になるわけですが、まずその意味するところを詳しく説明したいと思います。A が正作用素で、単位ベクトル x としたとき、関数 $f(t)$ が凸ならば、Jensen の不等式 $f(\langle Ax,x\rangle) \le \langle f(A)x,x\rangle$ が成り立ちます。Mond-Pečarić は、Kantorovich 不等式を、Jensen の不等式の逆不等式であると解釈しました。つまり、(2.1) を少し変形し、x を単位ベクトルにすると、$\langle A^{-1}x,x\rangle \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\langle Ax,x\rangle^{-1}$ になります。これは、$f(t)=t^{-1}$ に対する Jensen の不等式 $\langle Ax,x\rangle^{-1} \le \langle A^{-1}x,x\rangle$ のちょうど逆の評価式を与えているとみたのです。

$$\langle Ax,x\rangle^{-1} \le \langle A^{-1}x,x\rangle \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\langle Ax,x\rangle^{-1}$$

さらに説明を加えると、$f(t)=t^{-1}$ に対する Jensen の不等式を変形すると、 $1 \le \langle A^{-1}x,x\rangle/\langle Ax,x\rangle^{-1}$ になります。Jensen の不等式は商を比較すると 1 以上になると解釈できます。そうすると、この商の上限はどうなるのか、自然な疑問が生じます。でも、作用素 A を適当に動かすと、その商はいくらでも大きくなることは容易にわかります。この商を有限な値にするためには、ある種の制約が必要になります。Mond-Pečarić の解答は、与えられた正作用素のスペクトルが区間 $[m,M]$ に入っていれば、その上限は Kantorovich 定数になるというものでした。つまり、正作用素のスペクトルの範囲が $[m,M]$ にあれば、どんな正作用素をとってきても、その商の上限は Kantorovich 係数 $\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ で抑えられるということです。私たちは、Jensen の不等式 $\langle Ax,x\rangle^{-1} \le \langle A^{-1}x,x\rangle$ という評価に対して、その逆の評価式 $\langle A^{-1}x,x\rangle \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\langle Ax,x\rangle^{-1}$ を得ました。逆向きの関係式を得るだけなら、十分大きな係数をかければ、いつでも逆向きの評価式を得ることはできます。重要なことは、その係数のうちで最小なものを得るということです。繰り返しになりますが、いつでも、$\langle A^{-1}x,x\rangle$ は、$\langle Ax,x\rangle^{-1}$ より大きくなります。$\langle Ax,x\rangle^{-1}$ に何か係数をかけて、$\langle A^{-1}x,x\rangle$ より大きくすることができるのか。逆向きの不等式が成り立つようにする最小の係数は何かと問うたのが、Kantorovich 不等式から私たちが聞いた声でした。この意味で、私たちは「逆不等式」という用語を用いることにします。ところで、$f(t)=t^2$ に対する Jensen の不等式に対する逆不等式は同様に求めることができますが、それ以外の凸関数、例えば、$f(t)=t^3, t^4$ などの逆不等式は同様な考え方では求めることは難しく、この方面の研究は進みませんでした。ここに、Mond-Pečarić が登場します。そして、べき関数ばかりでなく、一気に一般の凸関数に対して、その逆不等式を求めることに成功しました。その証明に、所謂、Mond-Pečarić method と呼ばれる手法が使われました。

Theorem 2.4 (Mond-Pečarić[21]). A は、正作用素で、$0 < mI \le A \le MI$ を満たしているとする。関数 $f(t)$ が区間 $[m,M]$ 上で正値で、かつ凸であれば、任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\langle f(A)x,x\rangle \le K(m,M,f)f(\langle Ax,x\rangle)$$

が成り立つ。ただし、定数 $K(m,M,f)$ は、

$$K(m,M,f) = \max\left\{\frac{1}{f(t)}\left(\frac{M-m}{f(M)-f(m)}(t-m)+f(m)\right) : t\in[m,M]\right\} \tag{2.2}$$

で定義されている。また、等号が成立する x が存在するという意味において、この不等式は *sharp* である。

1998 年、古田 [14] は、べき関数 $f(t)=t^p$ に対して、定理 2.4 の結果を精密化しました。

Theorem 2.5 (古田 [14], Ky Fan[6]). 正作用素 A が、$0 < mI \le A \le MI$ を満たしているとする。$p \notin [0,1]$ とする。任意の単位ベクトル $x \in H$ に対して

$$\langle A^p x,x\rangle \le K(m,M,p)\langle Ax,x\rangle^p$$

が成り立つ。ただし、定数 $K(m,M,p)$ は、すべての実数 $p\in\mathbb{R}$ に対して

$$K(m,M,p)=\frac{mM^p-Mm^p}{(p-1)(M-m)}\left(\frac{p-1}{p}\frac{M^p-m^p}{mM^p-Mm^p}\right)^p \tag{2.3}$$

で定義される。

ここで、$p=2,-1$ のとき、$K(m,M,-1)=K(m,M,2)=\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ になりますので、この定数は、一般化された *Kantorovich* 定数と言われています。

Mond-Pečarić は、Kantorovich 不等式を Jensen 不等式の逆不等式であると解釈したわけですが、もう一つ別の視点も与えています。Kantorovich 不等式を $\langle Ax,x\rangle\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}\langle A^{-1}x,x\rangle^{-1}$ と変形します。すると、また違った景色が見えてきます。A を対角行列とすると、左辺は固有値の算術平均、右辺は調和平均になっています。つまり、Kantorovich 不等式は算術調和平均の不等式の逆不等式になっていると見たわけです。すると、次々と新しいことに気がつきます。もっと、一般の平均ではどうなっているのでしょうか。数の場合は、べき平均は単調性を持っています。非可換でも、正作用素 A に対して、$p<q$ ならば、$\langle A^px,x\rangle^{1/p}\le\langle A^qx,x\rangle^{1/q}$ が成り立ちます。特に、この不等式は、$p=-1,q=1$ のときが、算術調和平均の不等式を表しています。Kantorovich 不等式が算術調和平均の不等式の逆不等式だったわけです。では、Kantorovich 不等式の一般化として、べき平均の不等式の逆不等式は、どうなるでしょうか。それは、一般化された Kantorovich 定数 (2.3) を利用して次の結果を得ることができます。

Theorem 2.6 (Mond [20])**.** 正作用素 A が、$0<mI\le A\le MI$ を満たしているとする。$p<q$ とする。単位ベクトル $x\in H$ に対して

$$\langle A^qx,x\rangle^{1/q}\le K(m^p,M^p,q/p)^{1/q}\langle A^px,x\rangle^{1/p}$$

が成り立つ。

ここで、$p\to 0,q=1$ とすれば、次の Specht 型定理を導きます。

Theorem 2.7 (Specht[26], 藤井淳一・泉野・瀬尾 [9])**.** 正作用素 A が、$0<mI\le A\le MI$ を満たしているとする。単位ベクトル $x\in H$ に対して

$$\langle Ax,x\rangle\le S(h)\exp\langle\log Ax,x\rangle \tag{2.4}$$

が成り立つ。ただし、A の *condition number* を $h=\frac{M}{m}$ で、

$$S(h)=\frac{(h-1)h^{\frac{1}{h-1}}}{e\log h}\ (h\neq 1)\quad \textit{and}\quad S(1)=1.$$

A を対角行列とすると、この不等式 (2.4) の右辺は A の固有値の幾何平均になります。一般的に算術幾何平均の不等式 $\exp\langle\log A\ x,x\rangle\le\langle Ax,x\rangle$ が成り立ちますから、定理 2.7 は算術幾何平均の不等式の逆不等式を与えているとみることができます。この定数 $S(h)$ は、*Specht* 比と呼ばれ、算術幾何平均の不等式の商の上限を与えています。つまり、等号が成立するベクトル x が存在するという意味でこの不等式は sharp です。実数の話に直すと、任意の自然数 n に対して、区間 $[m,M]$ に属する勝手な n 個の実数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[m,M]$ を取ってきても、幾何平均に Specht 比 $S(h)$ をかければ、必ず算術平均より大きくできるという逆向きの不等式が成立することを言っています。

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\le S(h)\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \tag{2.5}$$

Kantorovich 不等式を算術調和平均の不等式の逆不等式とみることで、算術幾何平均の逆不等式を導くことができました。Specht はこのような考察とは異なる視点で考えましたが、Mond-Pečarić の視点はこれ

らを統一して扱うことを可能にしました。数学的な見方・考え方の大変面白いところだと思います。これらの定数は、これからの考察において本質的な役割を果たします。この「逆不等式」の考え方はさらに進歩します。f を作用素凸関数、Φ を線型正写像とすると、Jensen-Choi-Davis 不等式 $f(\Phi(A)) \leq \Phi(f(A)$ が自己共役作用素 A に対して成立します。しかし、f の作用素凸性を普通の凸関数に弱めると、この不等式は一般的には成立しません。「逆不等式」の考え方は、では、普通の凸関数では、どのような評価式が成り立つのかを問うことになります。そして、実際、次の不等式が成立します。f が凸関数のとき、$0 < mI \leq A \leq MI$ に対して、

$$\frac{1}{K(m,M,f)}\Phi(f(A)) \leq f(\Phi(A)) \leq K(m,M,f)\Phi(f(A))$$

が成り立つ。ただし、$K(m,M,f)$ は (2.2) で定義されている定数です。「逆不等式」の考え方が一歩前進しました。

さて、近年めざましく研究が進んでいる n 個の正作用素の幾何平均について、これまで述べてきた逆不等式の観点から、その非可換構造を調べてみたいと思います。この考察はまだまだ端緒に着いたばかりで、これからの研究の進展が大いに望まれるところです。若い研究者の積極的な貢献を期待したいところです。そのためにも、「逆不等式」という視点が、どのように数学研究にかかわるのかを説明したいと思います。その前に、考察する３つの n 変数版幾何平均の簡単な紹介を次節で行います。

3　３つの作用素幾何平均

まず、n 変数版の正作用素の幾何平均として、chaotic 幾何平均・安藤-Li-Mathias 幾何平均・Karcher 幾何平均の簡単な紹介から始めます。

正の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して、$((a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r)/r)^{1/r}$ は、$r \to 0$ のとき、幾何平均 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ に収束します。そこで、べき平均の自然な非可換化は、$A_1, \cdots, A_n$ を正作用素、$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ を重み ($\omega_i \geq 0$ かつ $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$) としたとき、$r \in \mathbb{R}$ に対して、$F(r) = (\sum_{i=1}^n \omega_i A_i^r)^{1/r}$ になります。実数の時は、r に関して単調増加関数ですが、作用素版のべき平均は、作用素順序に関して一般的には単調性を持ちません。しかし、Bhagwat-Subramanian[4] は、レヴナー・ハインツの不等式を用いて、$r \leq s$ ならば、条件 (1): $r \notin (-1,1), s \notin (-1,1)$ (2):$1/2 \leq r \leq 1 \leq s$ (3):$r \leq -1 \leq s \leq -1/2$ のいずれかを満たすとき、$F(r) \leq F(s)$ が成立し、さらに、

$$\operatorname*{u-lim}_{r \to +0} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i A_i^r \right)^{\frac{1}{r}} = \exp \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \log A_i \right)$$

となることを示しました。最近、Audenaert-日合 [3] により、その範囲以外では、不等式が成立しない例が構成されました。

そこで、重み $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ に対して、

$$\diamondsuit(\omega; A_1, \cdots, A_n) = \exp(\sum_{i=1}^n \omega_i \log A_i)$$

を考えることは自然でしょう。しかも、この幾何平均は chaotic 順序に関してよい性質を持っていることが知られています [25]。そこで、これを $A_1, \cdots, A_n$ の *chaotic* 幾何平均と呼ぶことにしました。特に、均等重み $\omega = (1/n, \ldots, 1/n)$ のときは、$\diamondsuit(A_1, \cdots, A_n) = \exp(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log A_i)$ とかくことにします。定式化の流れから言うととても自然な定義ですし、A_i が可換のときは、$\diamondsuit(A_1, \ldots, A_n) = \sqrt[n]{A_1 \cdots A_n}$ に

なります。しかし、残念なことに、幾何平均として持っていて欲しい、単調性やトランスフォーマー不等式などが成立しません。詳しい反例は、[2, 3] を参照にしてください。

その後、長い間、n 変数版の幾何平均の定式化が待たれていましたが、ついに、2005 年に新しい定義が、安藤-Li-Mathias[2] によって提案されました。n 個の可逆な正作用素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して、その幾何平均 $G_{\mathrm{ALM}}(A_1, \cdots, A_n)$ を次のように帰納的に定義します。$n = 2$ のときは、$G_{\mathrm{ALM}}(A_1, A_2) = A_1 \sharp A_2$ とします。$n-1$ まで、定義できたとして、n のとき、各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して、$A_i^{(1)} = A_i$ そして、$A_i^{(r)} = G_{\mathrm{ALM}}(A_1^{(r-1)}, \cdots, A_{i-1}^{(r-1)}, A_{i+1}^{(r-1)}, \cdots, A_n^{(r-1)})$ とします。このとき、作用素列 $\{A_i^{(r)}\}$ は、各 $i = 1, \cdots, n$ に対して、同じ極限を持つことがわかります。この共通の極限を n 個の幾何平均と定義しました。そして、

$$G_{\mathrm{ALM}}(A_1, \cdots, A_n) = \lim_{r \to \infty} A_i^{(r)}$$

とかくことにします。私たちは、この幾何平均を *ALM* 幾何平均と呼ぶことにします。このような構成法にもかかわらず、各 A_i が可換であれば、$G_{\mathrm{ALM}}(A_1, \cdots, A_n) = \sqrt[n]{A_1 A_2 \cdots A_n}$ になり、単調性やトランスフォーマー不等式、Self-duality など幾何平均として期待されるほぼすべての性質を満たしていることが示されました。特に、算術・幾何・調和平均の不等式も成立します。

$$\left(\frac{A_1^{-1} + A_2^{-1} + \cdots + A_n^{-1}}{n}\right)^{-1} \le G_{\mathrm{ALM}}(A_1, A_2, \ldots, A_n) \le \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$$

Chaotic 幾何平均は、残念ながら、この算術・幾何・調和平均の不等式は成立しません。その意味で、ALM 幾何平均の定式化のよさが光ります。

Kantorovich 不等式の観点からみると、早速、調べなければいけないことは、ALM 幾何平均に関する逆不等式でしょう。2 個の場合は既に富永 [27] が、$0 < mI \le A, B \le MI$ とすべての $t \in [0, 1]$ に対して、不等式 $(1-t)A + tB \le S(h) A \sharp_t B$ が成り立つことを示しています。3 個以上の場合にどうなるのかは興味深い問題です。一番最初にその構成法から考察したのは、山崎 [28] です。ここでは、次の結果を紹介します。

Theorem 3.1 (藤井淳一・藤井正俊・中村・Pečarić・瀬尾 [8])**.** $0 < mI \le A_i \le MI$ を満たす正作用素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して

$$\frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \le \frac{(M+m)^2}{4mM} G_{\mathrm{ALM}}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$$

が成り立つ。

この結果には、多少違和感をもたれると思います。Kantorovich 不等式の n 変数版は、それを算術調和平均の逆不等式としてみたとき、容易に導くことができます。そして、面白いことに全く同じ係数がそこに現われます。即ち、

$$\frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \le \frac{(M+m)^2}{4mM} \left(\frac{A_1^{-1} + A_2^{-1} + \cdots + A_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

が成り立ちます。そして、これを用いれば、定理 3.1 はすぐにわかります。従って、この逆不等式の評価は悪いと言わざるを得ません。しかし、次のことがわかっています。山崎 [28] は 2 個の場合に、$\frac{1}{2}(A_1 + A_2) \le (M+m)/2\sqrt{Mm} A_1 \sharp A_2$ と富永の結果を改良し、3 個の場合に、$\frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3) \le \frac{h^2-1}{2h \log h} G_{\mathrm{ALM}}(A_1, A_2, A_3)$ を示しました。これらの定数の間には、$0 < m < M$ で、$h = M/m$ としたとき、

$$S(h) \le \frac{h^2 - 1}{2h \log h} \le \frac{(h+1)^2}{4h} = \frac{(M+m)^2}{4Mm} \le S(h)^2$$

という関係があり、3より大きい場合に本質的に非可換の状況が表れていると考えられます。山崎の結果により、ALM 幾何平均と算術平均の逆不等式に現れる定数は Specht 比にはなるのは難しいと思われます。定理 3.1 は、任意の n 個に対する結果ですが、評価式はよくありません。でも、今のところ、この評価式を改良することはできていないのが現状です。n 変数版で可換の場合、算術調和平均の逆不等式の評価は Kantorovich 係数であり、算術幾何平均の逆不等式では、Specht 比でした。それが、非可換だと、算術調和平均の逆不等式は同じ Kantorovich 定数ですが、ALM 幾何平均だと、その逆不等式には Specht 比は現われません。ここに、ALM 幾何平均の非可換性が現れているのではないかと考えます。2個の場合は、ALM 幾何平均は可換の場合の幾何平均と全く同じ性質を満たしていました。それは逆不等式の視点に立っても同じです。しかし、3以上の n 変数版を考察すると、初めて非可換の状況が姿を現しました。でも、ALM 幾何平均と算術平均の逆不等式の評価がどうなるのか、まだ未解決です。本当に Kantorovich 定数が一番ベストなのかどうか？わかっていません。ところで、chaotic 幾何平均は幾何平均としては良い性質を持っていませんが、「逆不等式」の観点に立つと違います。(2.5) に対する非可換版が成立します [25]。つまり、$0 < mI \leq A_1, \ldots, A_n \leq MI$ と重み $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i \leq S(h) \Diamond(\omega; A_1, \ldots, A_n)$$

これは、chaotic 幾何平均が逆不等式の立場から見ると、じつによく可換の状況を表していることを示しています。勿論、これは最良の不等式になっています。

いずれにして、この ALM 幾何平均の定式化により、多くの数学者が n 変数版の作用素幾何平均に注目するようになりました。その中で、2006 年、Bhatia-Holbrook は、Cartan の手法を参考に、与えられた作用素との距離の和が最小になる作用素として、新しい幾何平均の提案をしました。この段階では、この構成法によって得られる作用素が幾何平均としての性質を満たしているのかどうかはわかっていませんでした。最近、Lim-Pálfia[19], Lawson-Lim[18] の研究により、この構成法が実は、$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ を重みとしたとき、Karcher Equation $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \log X^{-\frac{1}{2}} A_i X^{-\frac{1}{2}} = 0$ を満たす唯一解であることが示され、さらに、この解が幾何平均としての性質をすべて満たしていることもあわせて証明しました。そこで、この解を $G_{\mathrm{K}}(\omega; A_1, A_2, \cdots, A_n)$ とかき、*Karcher* 幾何平均と呼びます。ただこれだけでは、Karcher 幾何平均がなぜ幾何平均の非可換版になっているのかよくわからないかもしれません。そこで、この Karcher 幾何平均の意味を幾何的な観点から説明をしたいと思います。

$P(H)$ を可逆な正作用素の全体とし、$P(H)$ 上の Thompson Metric を

$$d(A, B) = \left\| \log\left(A^{-1/2} B A^{-1/2}\right) \right\|_\infty$$

とします。このとき、d は、$P(H)$ 上の完備な距離を与えます。2つの可逆正作用素を A, B、任意の $t \in [0, 1]$ に対して、$A \natural_t B$ は、$P(H)$ 上で A と B を結ぶ測地線になります。このとき、点 A における接ベクトルは、藤井-亀井 [10] による A と B の相対作用素エントロピーになりました：

$$S(A|B) = A^{1/2} \log\left(A^{-1/2} B A^{-1/2}\right) A^{1/2} = \lim_{r \to 0} \frac{A \natural_r B - A \natural_0 B}{r} = \lim_{r \to 0} S_r(A|B).$$

この準備のもとで、n 変数版の幾何平均について考えてみますが、その前に、対比として Thompson Metric ではなく、普通の距離 $d(A, B) = \|B - A\|_\infty$ を考えましょう。このとき、d に関して、2点 A と B を結ぶ測地線は荷重算術平均 $A \nabla_t B = (1 - t)A + tB$ になります。この測地線上で点 A における接ベクトルは $S(A|B) = B - A$ になります。従って、n 点 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を与えたとき、その重心は、$\sum_{i=1}^{n} \omega_i S(X|A_i) = 0$ を満たす点として考えられますが、簡単な計算でその解は、$X = \sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i$ になることがわかります。X は、各点の算術平均になります。この手法を真似てみます。まず、$n = 2$ の場合、任意の $t \in [0, 1]$ に対して、2点 A と B の重心 X_t は、

$$(1 - t) S(X_t|A) + t S(X_t|B) = 0 \tag{3.1}$$

を満たす点として考えられますが、この作用素方程式 (3.1) の解は、簡単な計算で、A と B の幾何平均 $X_t = A\sharp_t B$ になることがわかります。大変うまくいきました。ところで、$S(X|A) = \lim_{r\to 0} S_r(X|A)$ ですから、この作用素方程式 (3.1) の解は、$(1-t)S_r(X|A) + tS_r(X|B) = 0$ の解 $X = X_{t,r}$ の極限として考えられることが期待されます。実際、その解 $X_{t,r}$ は、

$$X_{t,r} = A\sharp_{t,r}B = A^{1/2}((1-t)I + (A^{-1/2}BA^{-1/2})^r)^{1/r}A^{1/2}$$

になり、$X_{t,r} \to X_{t,0} = A\sharp_t B$ に収束します。この事実は、n 変数版の幾何平均の構成法を与えます。同様に、$P(H)$ 上の n 点 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ と重み $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ に対して、作用素方程式

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i S(X|A_i) = 0 \tag{3.2}$$

の解は、$A_1, \ldots, A_n$ の幾何平均と期待されます。Lim-Pálfia[19] は、行列の場合に、$-1 \le r \le 1$ に対して、$\sum_{i=1}^{n} \omega_i S_r(X|A_i) = 0$ を満たす唯一解が存在することを示し、それが単調に Karcher 幾何平均に収束することを証明しました。さらに、Lawson-Lim[18] は、一般のヒルベルト空間上の作用素についても同様な結果を導きました。それは作用素べき平均と呼ばれ、$P_r(\omega; \mathbb{A})$ とかきます。ただし、$\mathbb{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ とおきます。実際、$\mathbb{A}$ が可換のときは、$P_r(\omega; \mathbb{A}) = (\sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i^r)^{1/r}$ になります。Lawson-Lim-Pálfia は、この作用素べき平均の様々な幾何平均の視点から性質を考察しました。この事実は、算術べき平均 $F(r) = (\sum_{i=1}^{n} \omega_i A_i^r)^{1/r}$ が、$r \to 0$ のときに chaotic 幾何平均 $\exp(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \log A_i)$ に収束することに対応しているとみられます。ただ、この算術べき平均 $F(r)$ は $0 < r < 1$ では、単調な性質は持っていないのですが、作用素べき平均 $P_r(\omega; \mathbb{A})$ は単調性を持っていることは大変興味深い性質です。

さて、2 個の作用素幾何平均は次の安藤・日合型不等式 [1] が成立します。

$$A \ \sharp_\alpha \ B \le I \qquad \Longrightarrow \qquad A^p \ \sharp_\alpha \ B^p \le I \quad \text{for all } p \ge 1$$

最近、山崎 [29] は、Karcher 幾何平均が安藤・日合型不等式を満たし、ALM 幾何平均は満たさないことを証明しました。ALM 幾何平均は任意の重みを持つ幾何平均を考えることができませんが、幾何平均としてほぼすべての性質を満たしていました。さらに、コンピュータによる計算で、簡単な場合はその行列を求めることができました。でも、ここで初めて、Karcher 幾何平均の有用性が出てきました。

Theorem 3.2 (山崎 [29])**.** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を n 個の可逆正作用素、ω をウエイトとする。このとき、次が成り立つ。

(1) $G_{\mathrm{K}}(\omega; A_1, A_2, \cdots, A_n) \le I \quad \Longrightarrow \quad G_{\mathrm{K}}(\omega; A_1^p, A_2^p, \cdots, A_n^p) \le I$ *for all* $p \ge 1$.

(2) $G_{\mathrm{ALM}}(A_1, A_2, \cdots, A_n) \le I \quad \Longrightarrow \quad G_{\mathrm{ALM}}(A_1^p, A_2^p, \cdots, A_n^p) \not\le I$ *for some* $p \ge 1$.

では、「逆不等式」の観点で、これらの幾何平均の非可換性を調べて見ることにします。

4 3つの幾何平均の比較

3つの幾何平均の比較を、安藤・日合型不等式の観点から眺めてみましょう。均等重み $\omega = (\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$ のときは、$G_{\mathrm{K}}(A_1, \cdots, A_n)$ とかくことにします。このとき、次の結果がわかります。

Theorem 4.1 (藤井淳一・瀬尾 [11])**.** 正作用素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が、$0 < mI \le A_i \le MI$ を満たすとする。このとき、次の *3* つの条件は同値になります。

(1) $\Diamond(A_1, A_2, \cdots, A_n) \le I$.

(2) $G_{\mathrm{K}}(A_1^p, A_2^p, \cdots, A_n^p) \le I$ *for all* $p > 0$.

(3) $G_{\mathrm{ALM}}(A_1^p, A_2^p, \cdots, A_n^p) \le \frac{(M^p+m^p)^2}{4M^pm^p} I$ *for all* $p > 0$.

一般的に、$\lim_{p\to 0} G_{\mathrm{K}}(A_1^p, \ldots, A_n^p)^{1/p} = \lim_{p\to 0} G_{\mathrm{ALM}}(A_1^p, \ldots, A_n^p)^{1/p} = \diamondsuit(A_1, \ldots, A_n)$ が成り立ちますので、(1) と (2) の同値性は、安藤・日合型不等式の観点からもわかります。G_{ALM} は安藤・日合型不等式を満たしませんので、一般的に、$G_{\mathrm{ALM}}(A_1^p, \ldots, A_n^p) \le I$ は成立しません。では、それはどのくらいまでに存在するのでしょうか。その存在する範囲を与えられた作用素のスペクトルの言葉で評価してみようとするのが、ここでの「逆不等式」の考え方です。上の定理はそれが Kantorovich 係数以下になることを示しています。2 つの幾何平均の相違が計量的に明確になりました。

次に、3 つの幾何平均の安藤・日合型不等式をまとめてみます。

Theorem 4.2 (山崎 [29], 藤井淳一・瀬尾 [11]). 正作用素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が、$0 < mI \le A_i \le MI$ を満たすとする。$h = \frac{M}{m}$ とおく。このとき、次が成り立つ。

(1) $\diamondsuit(A_1, \cdots, A_n) \le I \quad \Longrightarrow \quad \diamondsuit(A_1^p, \cdots, A_n^p) \le I$ *for all* $p > 0$.

(2) $G_{\mathrm{K}}(A_1, \cdots, A_n) \le I \quad \Longrightarrow \quad G_{\mathrm{K}}(A_1^p, \cdots, A_n^p) \le I$ *for all* $p \ge 1$.

(3) $G_{\mathrm{ALM}}(A_1, \cdots, A_n) \le I \quad \Longrightarrow \quad G_{\mathrm{ALM}}(A_1^p, \cdots, A_n^p) \le K(m, M, p) \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^p I$ *for all* $p \ge 1$.

ALM 幾何平均については、安藤・日合型不等式は成立しませんが、(3) は、$K(m, M, p) \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^p$ という補完係数のもとで成立することを言っています。ALM 幾何平均はただ安藤・日合型不等式が成立しないだけでなく、成立しないなら、どのくらいの範囲までなら成立するのかを (3) 式は示しています。

最後に、$0 < p < 1$ の場合を考えてみます。一般的には、ある $\alpha \in [0, 1]$ に対して、$A \sharp_\alpha B \le I$ であっても、すべての $0 < p < 1$ に対して $A^p \sharp_\alpha B^p \le I$ にはなりません。2 個の場合でも、すぐに簡単な反例を見つけることができます。そういうときに、「逆不等式」の考え方は、では、どのくらいの範囲までなら、それが成立するだろうかと考えます。その答えが次です。2 変数版の安藤・日合型不等式について、A, B を正作用素で、$0 < mI \le A, B \le MI$ とする。このとき、$\alpha \in [0, 1]$ に対して、

$$A \sharp_\alpha B \le I \quad \Longrightarrow \quad A^p \sharp_\alpha B^p \le m^{p-1} I \quad \text{for all } 0 < p < 1$$

が成り立つ [24]。n 変数版については、次がわかります。

Theorem 4.3 (藤井淳一・瀬尾・山崎 [12]). 正作用素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が、$0 < mI \le A_i \le MI$ を満たすとする。h_G を $G_{\mathrm{K}}(A_1, \ldots, A_n)$ の *condition number* とおく。このとき、次が成り立つ。

(1) $G_{\mathrm{K}}(A_1, \cdots, A_n) \le I \implies G_{\mathrm{K}}(A_1^p, \cdots, A_n^p) \le h_G^{1-p} I$ *for all* $0 < p < 1$.

(2) $G_{\mathrm{ALM}}(A_1, \cdots, A_n) \le I \implies G_{\mathrm{ALM}}(A_1^p, \cdots, A_n^p) \le \left(\frac{(M+m)^2}{4Mm}\right)^p I$ *for all* $0 < p < 1$.

2 変数の場合は、Karcher 幾何平均と ALM 幾何平均は一致して、均等ウエイトのときは、$A \sharp B$ になります。上の結果は、Karcher 幾何平均が、2 変数の場合とうまく整合性がとれていることを示唆しているように思います。

最後が少し早足になってしまいましたが、n 変数版作用素幾何平均の非可換構造を調べるのに、「逆不等式」の考え方が有効であることが少しでも理解していただければ、筆者にとって、うれしい次第です。今後のこの方面の研究がさらに深まることを期待して筆をおきます。

参考文献

[1] T.Ando and F.Hiai, *Log-majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197,198** (1994), 113–131.

[2] T.Ando, C.-K.Li and R.Mathias, *Geometric means*, Linear Algebra Appl., **385** (2004), 305–334.

[3] K.M.R.Audenaert and F.Hiai, *On matrix inequalities between the power means: counterexamples*, preprint.

[4] K.V.Bhagwat and R.Subramanian, *Inequalities between means of positive operators*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **83** (1978), 393–401.

[5] R.Bhatia and J.Holbrook, *Riemannian geometry and matrix geometric means*, Linear Algebra Appl., **413** (2006), no. 2-3, 594-618.

[6] Ky Fan, *Some matrix inequalities*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **29** (1966), 185–196.

[7] R.Frucht, *Sobre algunas desigualdades: Observación relativa a la solución del Problema N° 21, indicade por el Ing. Ernesto M. Saleme, Mathematicae Note-Boletin del Instituto de Mathemática "Beppo Levi" (Rosario)* **3** (1942), 41–46.

[8] J.I.Fujii, M.Fujii, M.Nakamura, J.E.Pečarić and Y.Seo, *A reverse of the weighted geometric mean due to Lawson-Lim*, Linear Algebra Appl., **427** (2007), 272–284.

[9] J.I.Fujii, S.Izumino and Y.Seo, *Determinant for positive operators and Specht's Theorem*, Sci. Math., **1** (1998), 307–310.

[10] J.I.Fujii and E.Kamei, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34** (1989), 341–348.

[11] J.I.Fujii and Y.Seo, *On the Ando-Li-Mathias mean and the Karcher mean of positive definite matrices*, to appear in Linear and Multilinear Algebra.

[12] J.I.Fujii, Y.Seo and T.Yamazaki, *Norm inequalities for matrix geometric means of positive definite matrices*, preprint.

[13] M.Fujii, J.Mićić Hot, J.Pečarić and Y.Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, 2013.

[14] T.Furuta, *Operator inequalities associated with Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities*, J. Inequal. Appl., **2** (1998), 137–148.

[15] T.Furuta, J.Mićić, J.E.Pečarić and Y.Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities 1, Element, Zagreb, 2005.

[16] L.V.Kantorovich, *Functional analysis and applied mathematics*, Uspehi Mat. Nauk., **3** (1948), pp.89-185. Translated from the Russian by Curtis D. Benster, National Bureau of Standards, Report 1509, March 7, 1952.

[17] W.Greub and W.Rheinboldt, *On a generalization of an inequality of L.V. Kantorovich*, Proc. Amer. Math. Soc., **10** (1959), 407–415.

[18] J. Lawson and Y. Lim, *Karcher means and Karcher equations of positive definite operators*, Trans. Amer. Math. Soc., Series B, **1** (2014), 1–22.

[19] Y.Lim and M.Pálfia, *Matrix power means and the Karcher mean*, J. Funct. Anal., **262** (2012), 1498–1514.

[20] B.Mond, *An inequality for operators in a Hilbert space*, Pacific J. Math., **18** (1966), 161–163.

[21] B.Mond and J.Pečarić, *Convex inequalities in Hilbert space*, Houston J. Math., **19** (1993), 405–420.

[22] M.Nakamura, *A remark on a paper of Greub and Rheinboldt*, Proc. Japon. Acad., **36** (1960), 198–199.

[23] P.Schweitzer, *Egy egyenlötlenség as aritmetikai kösépértékrö*, Matematikai és Physikai Lapok **23** (1914), 257–261.

[24] Y.Seo, *On a reverse of Ando-Hiai inequality*, Banach J. Math. Anal., **4** (2010), 87-91.

[25] Y.Seo, *Generalized Pólya-Szegö tyoe inequalities for some non-commutative geometric means*, Linear Algebra Appl., **438** (2013), 1711-1726.

[26] W.Specht, *Zur Theorie der elementaren Mittel*, Math. Z. **74** (1960), 91–98.

[27] M.Tominaga, *Specht's ratio in the Young inequality*, Sci. Math. Japon., **55** (2002), 585–588.

[28] T.Yamazaki, *An extension of Kantorovich inequality to n-operators via the geometric mean by Ando-Li-Mathias*, Linear Algebra Appl., **416** (2006), 688–695.

[29] T.Yamazaki, *The Riemannian mean and matrix inequalities related to the Ando-Hiai inequality and chaotic order*, Oper. Matrices, **6** (2012), 577–588.

address: 4-698-1 Asahigaoka Kashiwara Osaka 582-8582 Japan.

e-mail: `yukis@cc.osaka-kyoiku.ac.jp`

keywords: カントロヴィチ不等式，エンゼンの不等式，ALM 幾何平均, chaotic 幾何平均, 逆不等式, Kercher 幾何平均, 算術幾何平均の不等式

事務所移転のお知らせ

編集事務：水落清雄、尾形訓子

７月１日より、一般社団法人国際数理科学協会は、二十数年事務所を開設していました堺東を離れ、堺市浅香山に新事務所を開設致しました。

近隣には、大阪南部の拠点病院である浅香山病院や関西大学浅香山キャンパスがあります。

旧事務所からは、南海高野線で北に一駅ですが、従来とは、大きく異なり静かな環境です。

お近くに来られた折には、会員の先生方にお立ち寄り頂きたく存じます。

新住所：〒590-0011　堺市堺区香ヶ丘町 1-5-12-202

（中井酒店の二階）