一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.88/2013.8

編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

国際数理科学協会 2013 年度年会のお知らせ

OR 部門、統計部門の年会を以下のように開催しますので、よろしくお願いいたします。

年会担当理事 熊谷悦生

1. OR 部門 （代表者 菊田 健作）

日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「不確実性システムにおける意思決定」

（主査：木庭 淳（兵庫県立大学)、幹事：小出 武（甲南大学)、第３回研究会との共催）

日時：平成２５年８月３１日（土）１３：００～１７：００

場所：西宮市大学交流センター　〒 663-8035 西宮市北口町 1 番 2 号 ACTS6 階

アクセス：　阪急 西宮北口駅 北口から北東へ徒歩 2 分

http://www.nishi.or.jp/homepage/daigaku/info/

(1)「相互に依存する決定過程モデル」

藤田 敏治 氏（九州工業大学大学院工学研究院）

概要：　複数の決定過程が互いに再帰的に依存する決定過程モデルについて紹介する。このモデルでは、それぞれの決定過程において各期の状態と決定に依存し他の決定過程の初期状態が定まり、その初期状態に対し問題が解かれ、得られた最適値に依存して元の決定過程の利得関数値が定まる。この種の関係が再帰的に生じ、相互に依存した決定過程構造をなすのである。応用例として、落下試験回数最適化や多角形からの凸多面体構成問題についても紹介する。

(2)「電気自動車の充電スケジューリングとエネルギーマネジメント」

森田 浩 氏（大阪大学大学院情報科学研究科）

概要： 電気自動車は環境問題や快適性から注目されているが、一方で電力エネルギーの不足や充電インフラの未整備などの諸問題も多くある。本講演では、電気自動車の充放電に関わる話題として、集合住宅における電気自動車の充電スケジューリングと、充放電による電力ピーク低減のためのスケジューリングについて紹介する。

(3)「捜索ゲーム：そのモデルあれこれと施設警備，UAV 経路問題への応用」

宝崎 隆祐 氏（防衛大学校情報工学科）

概要： クープマンは捜索理論において最適資源配分問題を初めて議論したが、筆者は捜索ゲームにおける資源配分問題を長年研究してきた。今回の発表ではその様々なモデルを紹介するとともに、施設警備問題や UAV(無人航空機) の経路問題への応用例に触れる。

2. 統計部門 （代表者 地道 正行）

研究部会名:「統計的推測と統計ファイナンス」

世話人: 熊谷悦生, 地道正行

開催日時: 2013 年 8 月 24 日 (土) 10:30〜17:00

場所: 関西学院大学 梅田キャンパス 1403 教室

アクセス：阪急「梅田駅」 茶屋町口改札口より 北へ徒歩５分。

大阪市北区茶屋町 19-19 アプローズタワー 14 階 ＜受付、TEL06-6485-5611 ＞ 10 階

http://www.kwansei.ac.jp/kg_hub/

プログラム

午前の部

10:30〜11:00 于立洋 (大阪府立大学大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『線形・非線形状態空間モデルにおける予測アルゴリズム』

11:00〜11:30 河本直子 (大阪府立大学大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『株価の二項モデルにおける派生証券の価格評価と株価モデルの発展』

11:30〜12:00 山本康裕 (東京大学大学院工学系研究科)

『文書分類に関する研究動向』

午後の部

13:00〜13:40 地道正行 (関西学院大学商学部), **前田真之介** (関西学院大学大学 院商学研究科)

『ビジネス・データ・ビジュアライゼーション』

13:40〜14:20 宮本大輔 (東京大学情報基盤センター)

『Toward Big Data Analysis of Cyber Threat』

14:20〜15:00 藤井孝之 (滋賀大学経済学部)　TBA

15:00〜15:10 休憩

15:10〜15:50 熊谷悦生 (大阪大学大学院基礎工学研究科)　TBA

15:50〜16:30 林利治 (大阪府立大学大学院理学系研究科 情報数理科学専攻)

『カルマンフィルタとその応用について』

国際会議の後援

前回もお知らせしましたように、国際数理科学協会では、国際会議 NACA2013 を後援することとなりました。英文の案内文を次のページから掲載させていただきます。

和文名： 非線形解析学と凸解析学に関する第 8 回国際会議

英文名： The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis

開催時期： 平成２５年８月２日（金）～平成２５年８月６日（火）

開催場所：弘前大学創立 50 周年記念会館（青森県弘前市文京町）

会議についての問い合わせ先：

非線形解析学と凸解析学に関する第 8 回国際会議実行委員会事務局

〒036-8561 青森県弘前市文京町 3 番地

弘前大学大学院 理工学研究科

金 正道

ＴＥＬ 0172-39-3538 ＦＡＸ 0172-39-3526

E-mail masakon@cc.hirosaki-u.ac.jp

http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/NACA2013/

Forum for Interdisciplinary Mathematics

Twenty second International Conference of FIM on Interdisciplinary Mathematics, Statistics and Computational Techniques

IMSCT 2013 – FIM XXII

Kitakyushu International Conference Center
Kokura, Kitakyushu, 802-0001, Japan

November 10 (Sunday) - 12 (Tuesday), 2013

REGISTRATION FORM (A simple example)

NAME: ____

FIRST MIDDLE LAST

MALE / FEMALE__________ DESIGNATION: ______________________

AFFILIATION: ______________________________________

ADDRESS: (Including City, State, PIN / Zip)___________________________

____

COUNTRY:__________ PASSPORT NUMBER (If not from Japan)_______________

E-MAIL: ______________________ PHONE: ________________

FAX: ________________

ACCOMMODATION REQUIRED: Yes / No,

EXPECTED ARRIVAL DATE: __________ EXPECTED DEPARTURE DATE: __________

WILL PRESENT A PAPER: Yes / No IF YES: Invited / Contributed

TITLE OF THE PAPER:

____

BROAD AREA OF THE PAPER:

____

PAYMENT DETAILS

NUMBER OF COMPANIONS: ___________

TOTAL PAYMENT: JPY ___________

DETAILS OF DEMAND DRAFT/ MULTICITY CHEQUE:

NUMBER:____________ DATE: ___/___/2013

BANK: ______________________

DATE: SIGNATURE

The formal registration sheet is in the conference web site: http://www.f.waseda.jp/watada/FIM2013/.
Please use the sheet in the web site.

Conference Chair / Co-Chairs

Junzo Watada, Professor, Graduate School of Information, Production and Systems, Waseda University, Fukuoka, Japan, watada@waseda.jp

Hiroshi Sakai, Professor, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Fukuoka, Japan, sakai@mns.kyutech.ac.jp

Hiroaki Ishii, Professor, School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University, Hyogo, ishiihiroaki@kwansei.ac.jp

P. V. Subrahmanyam, Professor, Dept. of Mathematics, Indian Institute of Technology, Chennai, India, pvs@iitm.ac.in

D. S. Hooda, Dean & Head of the Dept. of Mathematics, Jaypee University Of Engineering and Technology, Guna, India, ds_hooda@yahoo.co.in

Kalpana K. Mahajan, Professor, Dept. of Statistics, Panjab University, Chandigarh, India, mahajan_kr@pu.ac.in

Tumulesh Solanky, Chair and Professor, Dept. of Mathematics, Univ. Of New Orleans, New Orleans, USA, tsolanky@uno.edu

Registration Fee:

	Till August 31, 2013	Till October 15, 2013	On site
Regular	40,000JPY	50,000JPY	60,000JPY
Student	30,000JPY	40,000JPY	40,000JPY
Regular from India	10,000RP	15,000RP	20,000RP
Student from India	10,000RP	15,000RP	15,000RP
Welcome Party ticket	5,000JPY	5,000JPY	5,000JPY
Banquet ticket	10,000JPY	10,000JPY	10,000JPY
CD proceeding	10,000JPY	10,000JPY	10,000JPY

Contact Us

Conference Website : http://www.f.waseda.jp/watada/FIM2013/
Email : fim2013@list.waseda.jp

Forum for Interdisciplinary Mathematics
Twenty second International Conference of FIM on Interdisciplinary Mathematics, Statistics and Computational Techniques

IMSCT 2013– FIM XXII

Kitakyushu International Conference Center
Kokura, Kitakyushu, 802-0001, Japan
November 10 (Sunday) - 12 (Tuesday), 2013

Sponsored, Cosponsored & Supported by

Forum for Interdisciplinary Mathematics

International Society of Management Engineers

Waseda University

International Society for Mathematical Sciences

City of Kitakyushu

Forum for Interdisciplinary Mathematics (FIM)

The Forum is a registered trust in India. It is an India based international society of scholars working in Mathematical sciences and related areas. The society was incepted in 1975 by a group of University of Delhi intellectuals led by Professor Bhu Dev Sharma. The forum has been conducting international conferences in India and abroad. The present conference is 22nd in a series of International Conferences of FIM held outside India in USA, Europe, Australia & China and in India, at Kolkata, Jaipur, Varanasi, Mysore, IIT-Bombay, Allahabad, Lucknow, IIT-Chennai, Patna, Waknaghat, Chandigarh. This year the conference is being hosted by the Graduate School of Information, Production and Systems, Waseda University, Fukuoka, Japan.

About Kitakyushu City, Climate

Kitakyushu, the gateway to Asia, is separated from Honshu by the Kanmon Straits. From ancient times, the city was blessed with both a rich natural environment and culture and has developed as a key junction for trade. In November, the temperature varies between 8-15 $_{o}$C.

http://www.city.kitakyushu.lg.jp/english/file_0069.html

Conference Venue and Accommodation

Direct access from JR Kokura station's North Exit – a 5-minute walk – and the concentration of all facilities make the International Convention the perfect location for large-scale conventions. This area is close to the downtown in Kitakyushu. There are several hotels around this area. You can see hotels in the next page,

http://www.convention-a.jp/language/english.html

Routes to Conference Venue

The conference venue is close to the JR Kokura station, so each participant will move to the Kokura station at first, and then he/she will move to the conference venue. The next site

http://www.kyutech.ac.jp/english/about/map/access.html

is the access to the TOBATA campus of Kyushu Institute of Technology near Kokura station. For more details, please search online maps with keywords JR Kokura station and Kitakyushu.

Nature of the Academic Program of the Conference

The academic program of the conference will consist of Symposia/Invited talks/Plenary talks /paper presentations, poster presentations, Ph.D. Scholar Best Paper award. Each participant is required to register and submit the relevant fee for participating in the conference. The fee structure for registration is given in the registration form. Persons interested in organizing symposia in their areas of expertise are invited to write to any one of Conference Chair/Co-Chairs/Organizing Secretaries.

Broad areas of the Conference

Mathematics: Analysis, Algebra, Ordinary and Partial Differential Eq., Wavelets, Fluid Dynamics, Physical sciences and Engineering.

Combinatorics: Graph Theory, Statistical Designs, Finite Geometries, Cryptography, Number theory, Information, Coding Theory.

Statistics: Applied Statistics, Biostatistics, Econometrics, Prediction, Time Series and Stochastic processes, Statistical Modeling, Multivariate Analysis, Reliability Analysis, Statistical Inference, Order Statistics.

Operations Research: Optimization Techniques, Applications to Industry, Management and Technology, Mathematical Modeling and Simulation.

Computer Science: Computational Techniques, Algorithms, Languages, Fuzzy Set Theory and Applications, Rough Set Theory and Applications, Software systems, Data Mining, Soft Computing, Application Systems.

Bioinformatics: Statistical techniques in Bioinformatics.

Research Papers in other fields having mathematical contents are also welcome.

International Advisory Committee

Narsingh Deo, Millican Chair Professor, School of Computer Science, University of Central Florida, Orlando, USA, deo@eecs.ucf.edu

Michel Deza, CNRS, & Ecole Normale Superieure, Paris, France, Michel.Deza@ens.fr

Sat N. Gupta, Professor of Statistics & Asóciate Head, UNC, Greensboro, North Carolina, USA, sngupta@uncg.edu

Aboul Ella Hassanien, Professor, Faculty of Computers & Information Technology, Cairo University, Egypt, abo@egyptscience.net

Toshiharu Ikeda, Professor, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Fukuoka, Japan, ikedat@mns.kyutech.ac.jp

Norikazu Ikoma, Associate Professor, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Fukuoka, Japan, ikoma@comp.kyutech.ac.jp

Lakhmi Jain, Professor, Knowledge-Based Intelligent Engineering Systems, Centre, University of South Australia, Adelaide, Australia, Lakhmi.Jain@unisa.edu.au

Hiroshi Maeda, Dean, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology, Fukuoka, Japan, hmaeda@ecs.kyutech.ac.jp

Sadaaki Miyamoto, Professor, Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba, Tsukuba, Japan, miyamoto@esys.tsukuba.ac.jp

S.P. Mukherjee, Ex-Centenary Professor of Statistics, University of Calcutta, Kolkata, India, mukherjeesp2000@yahoo.co.in

C. Radhakrishna Rao, Director, Indian Statistical Institute, New Delhi and later Director, Center of Multivariate Analysis, Pennsylvania State University, College Park, USA, crr1@psu.edu

Bhu Dev Sharma, Professor of mathematics, GIIT University, Noida-201307, India, sharmaforum@yahoo.com

Andrzej Skowron, Full Professor, Institute of Mathematics, The University of Warsaw, Warsaw, Poland, skowron@mimuw.edu.pl

Dominik Slezak, Professor, Institute of Mathematics, The University of Warsaw, Warsaw, Poland, and Infobright Inc., dominik.slezak@infobright.com

Yoshinobu Teraoka, President, JAMS, Japan, teraoka@agate.plala.or.jp

Shusaku Tsumoto, Professor, Faculty of Medicine, Shimane University, Matsue, Japan, tsumoto@computer.org

Toshitsugu Ueda, Professor, Graduate School of Information, Production and Systems, Waseda University, Fukuoka, Japan, t-ueda@waseda.jp

Guidelines for Submission of Papers

There are two types of submission, the first is an abstract submission and the second is a full paper submission. In each submission, a Word template file and tex template files are prepared in the web page. Please follow the instruction, and send your manuscript as an attached file to the next e-mail address: fim2013@list.waseda.jp. All manuscripts will be reviewed and only those manuscripts approved by the reviewers will be selected for presentation. Papers Presented at the conference will be selected for publication in: Scientiae Mathematicae Japonicae (International Sciety for Mathematical Sciences). Another journal is also considered. For more details, please examine the following.

Conference Website : http://www.f.waseda.jp/watada/FIM2013/
Email : fim2013@list.waseda.jp

＊寄稿

Catalan 数の一般化
— 格子経路組合せ論からの Approach —

佐藤　優子

(x, y) 平面上の格子経路とは、各格子点 (n, m) で x 軸方向に $+1$、或いは y 軸方向に $+1$ 移動する経路をいう。原点を出発し、直線 $y = x$ を cross することなく格子点 (n, n) に向かう異なる格子経路の個数 $C(n)$ は、次のように与えられる:

$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, \quad n \geqq 1 \tag{1}$$

$C(1) = 1$, $C(2) = 2$, $C(3) = 5, \cdots$ である。x 軸方向への移動を x, y 軸方向の移動を y で表わすと、原点から (n, n) への格子経路は x または y から成る長さ $2n$ の文字列で表される。$n = 3$ の場合、格子点 $(3, 3)$ へ向かう条件なしの格子経路の個数は $\binom{6}{3} = 20$ であるが、直線 $y = x$ を cross せず、 $(3, 3)$ へ向かう格子経路の個数は $C(3) = 5$ である。x, y 文字列で表すと、

$$yyyxxx,\ yyxyxx,\ yyxxyx,\ yxyyxx,\ yxyxyx. \tag{2}$$

の 5 通りである。式 (1) で与えられる組合せ数は、n 次の **Catalan 数**と呼ばれる。Catalan 数は、ベルギーの数学者 Eugene Charles Catalan (1814–1894) にちなんで名づけられた。$C(0) = 1$ と置くと、Catalan 数の漸化式及び母関数はそれぞれ、次式で与えられる。

$$C(0) = 1, C(n) = \sum_{k=0}^{n} C(k) \quad (n \geqq 1), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C(n)x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \tag{3}$$

Catalan 数は、Bell 数と同様、以下のような種々の組合せ問題に現れ、今日 **Catalan 対応問題**と呼ばれ詳しく調べられている。特に、H.W.Gould [1] は、1976 年以来 Catalan 数と BeLL 数に関する論文・資料を集め、2007 年段階で 470 に上る文献を収録している。

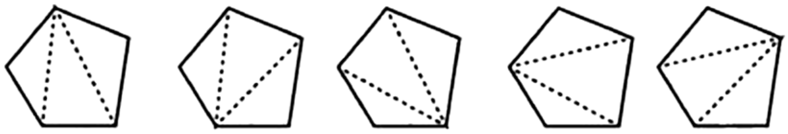
- $(n + 1)$ 項の文字列 $a_1a_2...a_na_{n+1}$ に対する非結合的な 2 項括弧付けの個数 (D.Singmaster,1979 [2]); (2) の x, y 文字列において、x を文字に、y を括弧 “ (”に対応させると、 (2) の文字列は、

$$(((a_1a_2a_3a_4, ((a_1(a_2a_3a_4, ((a_1a_2(a_3a_4, (a_1((a_2a_3a_4, (a_1(a_2(a_3a_4$$

  に対応する。Well-defined な括弧となるように、括弧 “) ”を加えると、

$$(((a_1a_2)a_3)a_4), ((a_1(a_2a_3))a_4)), ((a_1a_2)(a_3a_4)), (a_1((a_2a_3)a_4)), (a_1(a_2(a_3a_4)))$$

- 平面上の $(n+2)$ 凸多角形を互いに交わらない弦で n 個の三角形に分割する方法の個数 (Euler, 1758); $n=3$ の場合、a_1 から a_5 のラベル付の凸 5 角形において、辺 a_1 と a_2 で 3 角形を構成する場合、残りの新しい辺にラベル $(a_1 a_2)$ をつける作業で、3 角形分割は上記の $(n+1)$ 項の Bracketting 問題に対応させることができる。最後の辺 a_5 に最後の括弧づけが行われる。以下の $C(3)=5$ 通りの分割

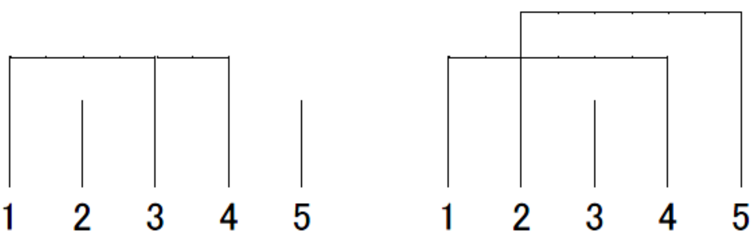


- Stack から得られる n 順列の個数 (D.E.Knuth,1973[3]); 格子経路の x, y 文字列において、x を Stack のトップの要素を取りだす、y を Stack のトップに要素を挿入と対応させると、入力文字 123 に対して Stack から得られる数列は、 (2) に対応して 321, 231, 213, 132, 123 の順列が得られる。順列 312 は、Stack (引込み線) では得られない順列である。

- $(n+1)$ の葉をもつ Planar Binary tree の個数 (D.A.Klarner, 1970[4])

- 自然数上のランダムウォークにおいて、原点を出発した粒子が負整数を経ず $2n$ ステップ後に原点に戻るランダムウォーク経路の個数; 格子経路の x, y 文字列において、x を左への移動、y を右への移動と対応させると (2) に対応するランダムウォーク経路は、0123210, 0121210, 0121010, 0101210, 0101010 となる。

- Murasaki Daigram-1976 年、H.W.Gould [1] は、源氏香の図に関する組合せ問題を最古の Catalan 事象として紹介した。**源氏香**とは、5 種類の香をそれぞれ 5 包ずつ、計 25 包を混ぜ、その中から 5 包を任意に取り出し、これらを焚く。例えば、1, 3, 4 番目が同じ香で 2, 5 番目の香が異なっているとき、これを源氏香の図と呼ばれる 5 本の縦線を用いた次の左図で表した。



このような源氏香の図の総数は、5 次の Bell 数 = 52 通りである。紫式部の「源氏物語」は、54 帖からなるが、最初の「桐壷」」及び最後の「夢の浮船」の 2 帖を除いた残りの 52 帖のタイトル名を 52 通りの源氏香の図に付けている。上記左の図は「朝顔」の帖である。右側は、 (1, 4) , (2, 5) , (3) の 3 種類の香からなる図を表すが、同一香を表す横線が cross している。cross しない源氏香の図に限定すると、その個数が 5 次の Catalan 数 $C(5)=42$ である。上記の源氏香の組合せ問題は、一般の正整数 n

へ一般化され、Catalan 対応問題として紹介されている。文献集 [1] の最後には、Gould 教授の日本語による「紫式部 万歳！ ヘンリーグールド教授」のサインが記されている。

以下、Catalan 数の一般化を扱う。a, b を非負整数とする。 (x, y) 平面において、原点を出発し直線 $L_1: y = x - b$ を cross することなく、格子点 $(n, n - b + a)$ へ向かう格子経路の個数を $W(n, a, b)$ とする。明らかに、$W(n, 0, 0) = C(n)$ である。鏡像の原理を用いると、下記の結果が得られる:

$$W(n,a,b) = \binom{2n+a-b}{n} - \binom{2n+a-b}{n-b-1}, \qquad n+a-b \geqq 0 \tag{4}$$

さらに、整数 $c \geqq 0$ に対して、平行直線 L_1 及び $L_2: y = x + c$ を cross することなく、格子点 $(n, n + a - b)$ へ向かう格子経路の個数を $T(n, a, b, c)$ とすると、下記の結果が得られている (L.Ellis, 1844 [5])。ただし、$0 \leqq a \leqq b + c$, $\binom{n}{r} = 0 \quad (n < r, r < 0)$ とする.

$$T(n,a,b,c) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \binom{2n+a-b}{n-r(b+c+2)} - \binom{2n+a-b}{n+c+1-r(b+c+2)} \right\} \tag{5}$$

- 深さ (容量) に制限のある Stack から得られる順列 (仙波一郎, 1980 [6]) ; Stack の深さが $c > 0$ で制限されている場合、Stack への入力、Stack からの出力のプロセスに対応する格子経路は、2 つの平行直線 $y = x$ 及び $y = x + c$ を cross することなく格子点 (n, n) へ向かう格子経路の個数

$$T(n,0,0,c) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n+c+1}{c+2}\right]} \left\{ \binom{2n}{n-r(c+2)} - \binom{2n}{n+c+1-r(c+2)} \right\}$$

である。

次に、傾きが整数 $k > 0$ の (平行) 直線で制限された格子経路組合せについて考える。直線 $y = kx$ を cross することなく原点から格子点 (n, kn) へ向かう格子経路の個数は、n 次の **heigher Catalan 数** (D.G.Rogers, 1977 [7], 1978 [8]) と呼ばれ、次式で与えられる:

$$C_k(n) = \frac{1}{kn+1}\binom{(k+1)n}{n} = \frac{((k+1)n)!}{(kn+1)!n!}, \quad n \geqq 0, \ (k: \text{正整数}) \tag{6}$$

$k = 1$ の場合が n 次の Catalan 数である。higher Catalan 数の母関数は、方程式

$$u = 1 + xu^{k+1} \tag{7}$$

の原点近傍で解析的な唯一の解 $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_k(n)x^n$ であることが知られている。 heigher Catalan 数に関しても、多くの対応問題が与えられている。以下、この母関数を用いて、直線 $L_1: y = kx - b$, $L_2: y = kx + c$ で制限される格子経路について論ずる。$W_k(n, a, b)$ 及び $T_k(n, a, b, c)$ をそれぞれ、直線 L_1 及び平行 2 直線 L_1, L_2 を cross することなく、原点から格子点 $(n, kn + a - b)$ へ向かう格子経路の個数とする。先ず、$W_k(n, a, 0)$ の漸化式を求めよう。原点から、格子点 $(n, kn + a)$ へ向かう格子経路の個数は、$\binom{(k+1)n+a}{n}$ である。これらの経路は、直線 $y = kx$ を cross せず $(n, kn + a)$ へ向か

うか、或いは、ある $r(0 < r \leqq n)$ に対して、原点 $(0,\,0) \to (r, kr-1) \to (r, kr) \to$以降、直線 L_1 を crooss することなく、終点 $(n, kn+a)$ に向かう格子経路である。従って、

$$\binom{(k+1)n+a}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{(k+1)r-1}{r} W_k(n-r, a, 0), n \geqq 0 \tag{8}$$

Higher Catalan 数の母関数方程式 (7) を一般化した Pólya& Szegö [9] の次の結果は、格子経路組合せ論において、重要な役割を果たしている (S.G.Mohanty, 1979 [10]); 任意の整数 α, β に対して、方程式 $u = 1 + xu^{\beta}$ の $|x| < \left|\frac{(\beta-1)^{\beta-1}}{\beta^{\beta}}\right|$ において解析的な唯一解 u は次の式を満たす:

$$u^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\alpha, \beta) x^n, \qquad \text{ただし, } A_n(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta n} \binom{\alpha + \beta n}{n} \tag{9}$$

$$\frac{u^{\alpha+1}}{(1-\beta)u + \beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta n}{n} x^n \tag{10}$$

明らかに、$A_n(1, 2) = C(n)$, すなわち、n 次の Catalan 数である。(10) 式において、$\alpha = a+1, \beta = k+1$ とおくと、

$$\frac{u^{a+1}}{-ku + k + 1} = \frac{u^0}{-ku + k + 1} W_k(x, a, 0)$$

が成り立つ。よって、$W_k(x, a, 0) = u^{a+1}$ である。また、$W_k(n, a, 0) = A_n(a+1, k+1)$, $n \geqq 0$ である。$A_n(\alpha, \beta)$ に関しては、下記の Convolution of Vandermond's Type の公式 (Gould [11]) が成り立つ: 整数 α_1, α_2 に対して、

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{\alpha_1 + \beta r}{r} A_{n-r}(\alpha_2, \beta) = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \beta n}{n}, \qquad n \geqq 0 \tag{11}$$

$b = 0$ の場合と同様の方法で、$W_k(n, a, b)$ の漸化式を求めることができる。

$n \geqq \max\left(0, \left[\frac{b-a}{k}\right]\right)$ に対して

$$\binom{(k+1)n+a-b}{n} = W_k(n, a, b) + \sum_{\left[\frac{b}{k}\right] < r \leqq n} \binom{(k+1)r-b-1}{r} W_k(n-r, a, 0). \tag{12}$$

$0 \leqq n \leqq [\frac{b-a-1}{k}]$ $(a < b$ の場合) に対しては、便宜的に、$W_k(n, a, b) = \binom{(k+1)n-b+a}{n}$ と定義すると、母関数に関する次の式が成り立つ (T.T.Cong& M.Sato, 1982 [12]):

$$\begin{aligned} u^{a-b+1}/(-ku+k+1) &= W_k(x, a, b) + \sum_{r=[\frac{b}{k}]+1}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} \binom{(k+1)r-b-1}{r} W_k(n-r, a, 0) x^n \\ &= W_k(x, a, b) + W_k(x, a, 0) \sum_{r=[\frac{b}{k}]+1}^{\infty} \binom{(k+1)r-b-1}{r} x^r \end{aligned}$$

従って、

$$W_k(x, a, b) = u^{a+1} \sum_{r=0}^{[\frac{b}{k}]} \binom{(k+1)r-b-1}{r} x^r = u^{a+1} \varphi_k(x, b) \tag{13}$$

ただし、$\varphi_k(x,n)$ は、$[\frac{n}{k+1}]$ 次の x の多項式で次のように定義される:

$$\varphi_k(x,n)=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{k}]}\binom{n-kr}{r}(-x)^r,\qquad n\geqq 0 \tag{14}$$

平行直線 L_1 及び L_2 で制限された格子経路の個数 $T_k(x,a,b,c)$ の母関数は、上記の多項式 $\varphi_k(x,n)$ を用いて、次の有理式で表すことができる (M.Sato& T.T.Cong, 1983 [13], M.Sato, 1983 [14])。ただし、$0\leqq n\leqq[\frac{b-a-1}{k}]$ $(a<b$ の場合$)$ に対しては、$T_k(n,a,b,c)=\binom{(k+1)n-b+a}{n}$ とする。

$$T_k(x,a,b,c)=\frac{\varphi_k(x,b)\times\varphi_k(x,b+c-a)}{\varphi_k(x,b+c+1)},\quad 0\leqq a\leqq b+c. \tag{15}$$

$k=1$ の場合、$\varphi_1(x,n)$ は、第二種の Chebyshev 多項式 $U_n(x)$ を用いて、次のように表すことができる。

$$\varphi_1(x,n)=\sqrt{x}^nU_n\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right),\quad \text{ただし}, U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

- 破産問題: 玉が入ると 15 個の玉が出るパチンコにおいて、玉が出る確率を p、出ない確率を $q(=1-p)$ とする。今、$(b+1)$ 個の玉でパチンコを始めたとき、玉が無くなるか (破産) 、或いは玉が $(b+c+1)$ 個以上となれば終了とする。破産する確率を求めよ。これは、2 つの吸収壁を持つ 1 次元ランダムウォークにおいて、1 ステップのステップ幅が異なる場合の問題である。玉が出た回数を x, 玉がでなかった回数を y とすると、その時点での持ち玉の個数は $14x-y+b+1$ である。従って、$1\leqq 14x-y+b+1\leqq b++c+1$ の条件を満たす限り、勝負は続く。$14x-y+b+1=0$ の場合に破産し、$14x-y+b+1>b+c+1$ の場合に勝って終了する。2 次元平面において、傾きが 14 である平行直線を $L_1:y=14x-b$, $L_2:y=14x+c$ と置くと、勝負のプロセスは原点を出発する格子経路によって表現することができる。経路がこれらの平行直線を cross しない限り、勝負は続く。破産するのは、直線 L_2 を cross する場合である。$x=n$ で cross とすると、直前の格子点は L_2 上の $(n,14n+b+c)$ である。そのような格子経路の個数は、$T_{14}(n,b+c,b,c)$ であり、それぞれの出現確率は、$p^nq^{14n+b+c}$ である。従って、

$$\text{破産する確率 }=q\times\sum_{n=0}^{\infty}T_{14}(n,b+c,b,c)p^nq^{14n+b+c} \tag{1}$$

$$=q^{b+c+1}\left(\frac{\varphi_{14}(x_p,b)\times\varphi_{14}(x_p,0)}{\varphi_{14}(x_p,b+c+1)}\right)=\frac{q^{b+c+1}\varphi_{14}(x_p,b)}{\varphi_{14}(x_p,b+c+1)}\quad\text{with } x_p=pq^{14}. \tag{2}$$

ただし、$\varphi_{14}(pq^{14},n)=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{14}]}\binom{n-14r}{r}(-pq^{14})^r,\quad n\geqq 0.$

著者が Catalan 数の一般化を格子経路組合せ論の観点から研究に取り掛かったのは、1980 年代である。当時、故石原忠重先生 (元国際数理科学協会会長) と共に、Caianiello 神経方程式に基づく「神経回路網の数理理論」の共同研究を行っていた。その過程で左右へのステップ幅が正整数 k_0,k_1 で与えられる 1 次元ランダムウォークの吸収確率の問題に出会った。ランダムウォーク経路は、傾きが有理数 $\frac{k_1}{k_0}$ の直線或いは平行直線で制限される格子経路の組合せ論に帰着することができる。論文 [12], [17] は、こ

れらの問題を扱っている。さらに著者は、2 次元平面上の格子経路を多次元空間上の格子経路への一般化を行った。課せられる制約は、$(m+1)$ 次元空間における次の平行超平面である:

$$L_1:\ \ y=\sum_{r=1}^{m}k_rx_r-b, L_2:\ y=\sum_{r=1}^{m}k_rx_r+c, \quad (k_r>0, \text{及び}\, b, c\geqq 0\ \text{は整数})$$

これらの超平面で制限される組合せ数の母関数 (M.Sato& T.Sado, 1985 [15]) を求めるとともに、A.Wald による逐次抜き取り検査方式への応用を試みた (H.Yabuuchi& M.Sato [16]) 。階級分けされた不良品を含むロットの逐次抜き取り検査では、y 軸は良品の個数、x_r 軸は、レベル r の不良品の個数に対応する。また、平行超平面の傾きが有理数 (M.Sato, 1992 [18]) の場合への一般化も扱っている. 傾きが有理数 $\frac{k_r}{k_0}$ $(0<k_0\leqq k_r,\ r=1,\cdots,m)$ の場合、母関数の基本となる関数は、方程式 $u^{k_0}=1+\sum_{r=1}^{m}x_ru^{k_0+k_r}$ の原点近傍における解析解である。

参考文献

[1] H.W.Gould, Bell & Catalan numbers : Research Bibliograhy of two Special Numbers Sequences, Combinatorial Research Institute, Morgantown, W. Virginia, (1976).

[2] D.Singmaster, Some Catalan Correspondences, J.London Math. Soc., **19**(1979), 203–206.

[3] D.E.Knuth, Fundamental Algorithms, Addison–Wesley, 2nd edition, (1973).

[4] D.A.Klarner, Correspondence between plane trees and binary sequences, Jour. Of Comb. Theo. **9**(1970), 401–411.

[5] L.Ellis, On the solution of equations in finite differences, Cambridge, Math.Jour., IV ,No.XXII (1844).

[6] 仙波一郎, 深さに制限のあるスタックを用いて, 得られる順列の数とその母関数について, 数学 **33/1**(1980), 79–80.

[7] D.G.Rogers, A Schröder triangle: three combinatorial problems, Lec. Notes in Math. **622**, Spronger, Berlin (1977), 175–196.

[8] D.G.Rogers, Pascal Triangles, Catalan numbers and renewal arrays, Discrete Math., **22**(1978), 301–310.

[9] S.G.Mohanty, Lattice Path Counting and Applications. New York: Academic Press, 1979.

[10] G.Pólya and G.Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Vol.1, Springer, Berlin, 1925.

[11] H.W.Gould, Some generalizations of Vandermonde's convolution, Amer.Math.Monthly, **63**(1956), 84–91.

[12] T.T.Cong and M.Sato, One–dimentional random walk with unequal step lengths restricted by an absorbing barrier, Discrete Math., **40**(1982), 153–162.

[13] M.Sato and T.T.Cong, The number of minimal lattice paths restricted by two parallel lines, Discrete Math., **44**(1983), 249–261.

[14] M.Sato, Note on the number of minimal lattice paths restricted by two parallel lines, Discrete Marh., **44**(1983), 117–121.

[15] M.Sato and T. Sado, Lattice paths restricted by two parallel hyperplanes, Bull. Of Infirmatics and Cybernetics, **21, 3/4**(1985), 97–105.

[16] H.Yabuuchi and M.Sato, A sequential sampling plan for a lot with classified defectives, Bull. Of Infirmatics and Cybernetics, **22, 3/4**(1987), 225–237.

[17] M. Sato, Generating funtions for the number of lattice paths between two parallel lines with a rational incline, Math. Japonica, **34** (1) (1989), 123–137.

[18] M.Sato, Generating function of the number of lattice paths restricte d by two parallel hyperplanes, J.Stat.Plan.Infer., **34**(1992), 251–257.

国際数理科学協会へのご案内

国際数理科学協会（ISMS）は、1948 年の創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得てきた Mathematica Japonica(M.J) と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ Scientiae Mathenaticae(SCM) とを発行し、数理科学の発展に貢献してきました。今世紀この両誌を合併、 21 世紀 MJ/SCM New Series "Scientiae Mathenaticae Japonicae (SCMJ)" と名称を変更し、純粋数学から応用数理までをカバーする国際的学術誌として発行を続けております。今日まで 260 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の学術誌です。

(1) 日本のみならず、海外 20 カ国に渡る 80 名の著名な教授・研究者が、Editorial Board に参加しています。掲載可能と判断された投稿論文は、印刷版のみならず電子版として掲載されております。SCMJ に掲載された論文は、Mathematical Review や Zentralbatt によって review されています。

(2) SCMJ は、世界中の多くの図書館へ配布されています。SCMJ の印刷版は、関連する研究者グループに積極的に紹介されており、研究者間交流を促進するのに役立っております。

(3) ISMS 年会：ISMS 会員・非会員が集まり、発表・討論する研究集会が毎年行われています。

[会員に対する特典]

(1) SCMJ の online version へ自由にアクセス可能となります。（プリントも自由です。）

(2) 年間 3 回発行の Scientiae Mathenaticae Japonicae(SCMJ) が配布されます。

(3) Scientiae Mathenaticae Japonicae(SCMJ) への投稿論文が掲載される場合、掲載料は無料になります。

（入会金：無料、　年会費：正会員 6000 円；準会員 4000 円）

□□□　国際数理科学協会事務連絡・入会の問合せ先　□□□

住所：大阪府堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内
新規入会担当：水落（ミズオチ）
電話：（072）222-1850
E-mail:scm4j@jams.jp