一般社団法人
国際数理科学協会会報

No.87/2013.5　　編集委員： 藤井淳一（委員長）

目次

国際会議の後援

国際数理科学協会では、国際会議 NACA2013 を後援することとなりました。

http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/NACA2013/

和文名： 非線形解析学と凸解析学に関する第８回国際会議

英文名： The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis

開催時期： 平成２５年８月２日（金）～平成２５年８月６日（火）

開催場所：弘前大学創立 50 周年記念会館（青森県弘前市文京町）

会議についての問い合わせ先：

非線形解析学と凸解析学に関する第 8 回国際会議実行委員会事務局
〒 036-8561 青森県弘前市文京町 3 番地
弘前大学大学院 理工学研究科
金 正道
ＴＥＬ 0172-39-3538 ＦＡＸ 0172-39-3526
E-mail masakon@cc.hirosaki-u.ac.jp

社員総会議事録

場所：大阪教育大　天王寺分校３ F307 号室

時　：14 時 00 分から 16 時 00 分

議長：代表理事　寺岡義伸

出席者（代議員）：石井博昭、植松康祐、熊谷悦生、佐藤優子、高橋渉、田畑吉雄、寺岡義伸、長尾壽夫、藤井淳一、藤井正俊、八木厚志、和多田淳三

委任状：石井伸郎（委任：寺岡義伸）、河上哲（委任：議長）、北廣男（委任：議長）、北原和明（委任：議長）、金正道（委任：議長）、佐藤俊輔（委任：議長）、地道正行（委任：議長）、鈴木武（委任：議長）、曽布川拓也（委任：議長）、棚橋浩太郎（委任：議長）、玉置健一郎（委任：議長）、中井英一（委任：議長）、中西シヅ（委任：議長）、渚勝（委任：寺岡義伸）、服部泰直（委任：寺岡義伸）、宝崎隆祐（委任：議長）、八杉満利子（委任：議長）

総社員数 30 名、出席者数 29 名（委任状を含む）29 名。総会は成立。

議題

1. 報告事項

（イ）平成 24 年度事業報告

- SCMJ 誌の発行については、投稿論文本数がやや回復し、Vol.75 は、3 冊の発行となった。また、投稿方法を簡略化するとともに、電子版公開年数についても一部短縮した。
- 年次大会としては、次の３件が行われた。
  (1) 「統計的推測と統計ファイナンス」分科会研究集会
  (2) 「確率モデルと最適化」分科会研究集会
  (3) 「代数、論理、幾何と情報科学研究集会（ALGL）」分科会研究集会
- 会報　年間 6 冊発行、９月号から、冊子から電子メールでの配信に変更を行った。
- 会費の変更（正会員、終身会員）、購読料の廃止及び SCMJ 誌配布を行った。これらは、会員より概ね好評価である。

（ロ）平成 24 年度会計報告

- 過年度分税金支払い等の事情を考慮すれば、前年と同程度の赤字である。幸いに、急激な円安が追い風となり、協会純資産は微減に留まった。

2012年度　　貸借対照表

（12/1/1-12/12/31）

（￥）会計

借 方			貸 方		
科　目	期　首	期　末	科　目	期　首	期　末
固定資産(保証金)	1,077,615	1,077,615	協会活動予備資金		
流動資産	2,348,177	1,250,538	出版基盤強化積立金	500,000	500,000
定期預金	0	0	TOTAL INDEX 積立金	500,000	500,000
			設備更新積立金	500,000	250,538
普通預金	2,135,639	1,250,538	IT機器積立金		
現金	212,538	0	事務所移転積立金	1,077,615	1,077,615
			事務機購入積立金	250,000	0
			減価償却積立金	300,000	0
			回転資金	212,538	0
			繰越金	85,639	0
合　計	3,425,792	2,328,153	合　計	3,425,792	2,328,153

外貨会計

借 方			貸 方		
科　目	期　首	期　末	科　目	期　首	期　末
固定資産			協会活動予備資金	$100,000.00	$100,000.00
流動資産			IT機器積立金	$48,286.00	$48,286.00
定期預金	$1,069.41	$1,069.65	＄ー￥準備金		
普通預金	$230,274.85	$223,872.99	繰越金	$131,344.26	$124,942.64
$国債2	$48,286.00	$48,286.00	合　計　＄	$279,630.26	$273,228.64
合　計＄	$279,630.26	$273,228.64			
（ユーロ）	€ 5,986.47	€ 5,986.94	（ユーロ）	€ 5,986.47	€ 5,986.94
￥マルチマネー	¥275,754	¥275,795	￥マルチマネー	¥275,682	¥275,795
￥普通預金	¥809,948	¥5,088	￥普通預金	¥809,948	¥5,088

数理科学推進基金会計

借 方			貸 方		
科目	期　首	期　末	科目	期　首	期　末
清水基金	1,000,000	1,000,000	ISMS受賞基金	1,000,000	1,000,000
功力基金	100,000	100,000	国際研究交流基金	1,737,510	1,737,510
石原	2,000,000	2,000,000	通信費	100,000	0
その他	539,080	539,080	交通費	100,000	0
			繰越金	701,570	901,570
合計	3,639,080	3,639,080	合計	3,639,080	3,639,080

2. 審議事項

（イ）平成 25 年度事業計画

- SCMJ 誌は、3 回発行予定。（論文の集まりよっては、増刊号 1 号発行）価格は今年度を据え置き。投稿論文本数を安定的に確保し、継続して年 3 回の発行を目標とすること。

- 投稿論文数確保・新規会員獲得の点で、SCI 取得の意義・重要性について、意見が寄せられた。

- 年 3 回確実に発行することで雑誌評価を高く維持できることが認識された。

- 名誉会員として、新たに当協会に貢献していただいた 8 名の先生方（長尾壽夫先生、牧春夫先生、長田尚先生、岡安隆照先生、古田孝之先生、山縣秀雄先生、櫻木武先生、安井義和先生）が推薦され、満場一致で可決された。

- 米ドル国債の満期が近いが、昨今の円安基調に鑑み、満期を待たず売却し利益確定を行うことが承認された。

- 和多田淳三先生が昨年から企画しておられたインドを中心として外国から研究者を招く、学際的数学、統計学、計算機科学に関する国際会議（FIM Conference）を、2013 年 11 月に、北九州の小倉で開催することが決まった。この国際会議の運営は全て和多田淳三先生にお任せし、国際数理科学協会は全面的に協力すること、要請があれば、国際会議記事として Scientiae Mathematicae Japonicae の特集号を発行する、この会議運営のために二つの委員会 advisory committee と program committee　に委員を推薦することも、決まった。

- 石井博昭先生が世話をして、中国ハルピン工科大学理学部数学科と共同でこの協会の名を冠したセミナーを近々年に開催する企画が承認された。

（ロ）平成 25 年度予算

- 物件費（通信費・コピー機等）の見直しにより、今年度下半期より、経費削減効果を見込む。

＊2012年度決算予算表 （12/1/1-12/12/31）

収 入

科　　目	11年度決算	12年度決算	13年度予算
前年度繰越金	366,715	147,546	−
刊行物頒布代(書店)	1,167,000	679,760	600,000
刊行物頒布代(書店)海外＄より	1,100,000	600,000	600,000
会費			
機関会員 A(旧協力校)			
機関会員 B(交換誌)		318,000	318,000
賛助会員(機関会員)	309,400	1,013,265	700,000
正会員(国内)	1,155,500	638,412	500,000
海外書店郵送費(EBSCO)$より	20,000		
海外書店(カード払い)	36,337		
海外正会員(￥払い)		5,753	
海外正会員(＄→￥)	31,022		
ページチャージ(¥)	104,600	44,000	40,000
ページチャージ(＄→￥)	21,465		
単年度掲載費	10,000	3,000	
抜刷郵送代	355,682	14,000	−
設備更新積立金			
(イ)減価償却積立金取り崩し分	200,000	300,000	
(ロ)回転資金取り崩し分		212,538	
(ハ)事務機購入積立金取り崩し分	100,000	250,000	
預金利子	560	115	
($→¥)	500,000	1,055,772	577,000
雑収入	1,200	1,000	1,500,000
合　　計	5,479,481	5,283,161	4,835,000

支 出

科　　目	11年度決算	12年度決算	13年度予算
通信交通輸送費(ｲ+ﾛ+ﾊ)	1,025,292	515,906	430,000
(ｲ) 編集通信交通費	666,100	310,150	250,000
(ﾛ) 査読通信費	3,000	−	
(ﾊ) 抜刷等輸送費	356,192	205,756	180,000
講演依頼料		50,000	
租税公課		19,187	20,000
印刷費	560,547	811,861	880,000
組版委託費	87,100	37,620	40,000
SE委託費	277,100	389,840	420,000
消耗品代	19,483	36,154	25,000
備品代(OA機器soft,本代)	17,540	10,500	70,000
人件費	1,147,065	1,223,965	1,300,000
借事務所代	1,330,598	1,329,479	1,330,000
電話代	424,586	389,867	200,000
振込料	12,690	10,270	10,000
備品補修費			
保険料	4,500		
税金	110,700	352,800	60,000
会費(学術団体)	50,000	50,000	50,000
コピー費	52,196	55,712	−
基礎財産へ繰入			
予備費等			
次年度回転資金	212,538	−	
次年度繰越金	147,546	−	
合　　計	5,479,481	5,283,161	4,835,000

（ハ）今後の協会運営の進め方

- 現在は、一般社団法人であるが、可能であれば公益法人移行を目指しても良いのではと意見が寄せられた。
- 会報については、HP で迅速に閲覧できるようにし、広報活動に資するようにする。
- 会報の発行頻度については、2013 年度から年 3 回程度を目処に、順次減少させてゆく。
- 会員の高齢化が進み、若年会員の増加が継続的に課題となる。
- 中期的には事務所移転により、事務所賃貸料及び電気代等の削減を検討課題とする。
- 日本語での刊行物（電子ジャーナルも含め）の必要性について、今後の検討課題とする。
- 寄付金の規定・運用については、お受けした段階で、正式書面を協会が発行し、寄付者に対して、減税が図られるように対処する。

（ニ）次期（平成 26 年度）代表理事の選出方法

- 今後一年間をかけて、新代表理事が決定できるよう活動を行う。
- 新代表理事の負担を軽減するため、副代表理事の制度を有効に活用することも考慮する。

理事会議事録

理事会

総会終了後、直ちに理事会が開会された。理事 8 名、監事が出席されたので、理事会は成立し、総会での決定事項は全て全員の賛成が得られ承認された。また論文誌編集委員会理事も 2 名出席され、適切な参考意見を頂いた。

＊寄稿

月光への号令 — テンソル代数をめぐって

大阪教育大学 教養学科 情報科学
藤井　淳一

1　はじめに

作用素頂点代数という単語は耳にしていたものの、直接私自身が取り扱う対象でもないかと思い、あまり気に留めていませんでしたが、ふとしたことで、符号理論と深い関係にあることを知り、所属の関係上無視できない存在になりました。時間が取れるうちに勉強しておこうと思って、昨年の夏休み中（といっても全然「休み」ではなかったのですが）にいろいろと調べてみました。拙文はその記録です。

きっかけになったのは、プレゼン用資料 [17] で、著者の先生は一時期教育大に所属されたこともあり、面識もある方でした（同じ研究室を共用していたこともありました）。興味深い話だったので、引き込まれてしまいました。符号理論は代数学の応用の一つですが、現在は主に代数幾何学と関連をもって発展しており、まさかそこから逆に本家の代数学に寄与することがあろうとは思ってもみませんでした。それが、モンスターなどとおどろおどろしい名前で呼ばれるような有限群論上重要な群とかかわっているとは（直接的にはそれを自己同型群として生成する「ムーンシャイン加群」と関わるのですが、こちらは可愛いらしい名前のようで $\cdots$ ）。勘の鋭い方はここで既にネタがばれたかと思いますが、題名の中の月光はこのことを指した駄洒落です。もう一つの「号令」もほどなくばれるかと思います。

結構広がりのある分野ですので、あまりものを知らない身としては、一つのことを納得するために、結構たくさんのことを勉強させられました。何分いつものように我流ですので、専門家から見ておかしい点は多々あると思いますが、その点はご容赦の程お願いいたします。

2　線形符号

まず題材の一つである線形符号について触れておきます。有限体 $\mathbb{F}$ 上の線形符号 $\mathcal{C}$ とは、$\mathbb{F}$ 上の線形空間のカテゴリーにおいて、次の短完全系列を満たす $\mathbb{F}^n$ の部分空間のことで、情報符号空間 $\mathbb{F}^k$ の拡大として位置づけられます：

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}^k \xrightarrow{G^*} \mathcal{C} \xrightarrow{H} \mathbb{F}^{n-k} \longrightarrow 0 \ \ : \text{exact}$$

通常の言いかたでいえば、$\mathcal{C} = G^*\mathbb{F}^k = \ker H$ のことですが、G は生成行列、H は検査行列と呼ばれます（通常の符号理論では、横ベクトルを主体にするので、G の方を生成行列と呼んでいて、各行が $\mathcal{C}$ の基底になっています）。

von Neumann がコンピュータを設計したとき、メモリのパリティチェックを行いました。それが初歩的な符号ですが、2 元体 $\mathbb{F}_2$ 上の長さ k の情報列について、座標の全合計が 0（つまり

偶数）となるように、1 ビットを付加してできる長さ $n=k+1$ の符号です。G と H は以下のものです（I_k は k 次単位行列です）:

$$G=\begin{pmatrix} & & 1\\ & I_k & \vdots\\ & & 1\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

すると、情報列の横ベクトル $(x_j)\in\mathbb{F}^k$ について、$(x_j)G^*=\begin{pmatrix}(x_j) & \sum_{j=1}^k x_j\end{pmatrix}$ という符号となって、H でチェックした結果（**シンドローム** S）は、この場合に限りスカラーで、

$$S=H((x_j)G)^*=H\bigl(x_1,...,x_k,\sum_{j=1}^k x_j\bigr)=\sum_{j=1}^k x_j+\sum_{j=1}^k x_j=0 \pmod 2$$

となって、1 か所誤りがあればシンドロームが 0 ベクトルでなくなって検出できます。線形符号では、座標ができるだけ違う方が誤りを検出・訂正しやすくなります。

異なる符号語で座標が違う個数を **Hamming 距離**といい、符号語単体で 0 でない座標の個数を **Hamming 重み**といいますが、0 ベクトルを除いた最小値は線形性から一致し、**最小距離**, **最小重み** といい d で表します。これが符号の性能を表すパラメータなので、符号長 n, 情報符号長 k とまとめて、**(n,k,d)-符号** としばしば称します。誤った符号語は 1 か所間違うたびに正しい語との距離が 1 増えますので、自然数 t について最小距離が $2t+1$ のとき、t 箇所の間違いは、正しい符号語中心の半径 t の球内にあり、距離が一番近い符号語が正しいものと解釈して訂正可能になります。このように、いかに符号語中心の距離 t の球が重ならないように配置するかが、誤り性能を高くするポイントになります。したがって、具体的説明は後述しますが、**ハミング限界式** $\sum_{j=0}^t {}_nC_t \leqq 2^{n-k}$ の限界に近いほど効率の良い符号といえ、等号が成立する符号は**完全**と呼ばれます。

後に出てくる Golay 符号も $\mathbb{F}_2$ 上のもので、まず、**完全 2 元 Golay 符号**としては、12 次元横ベクトル $v=(101011100011)$ を考え、符号長 $n=23$ として、生成行列

$$G=\left.\overbrace{\begin{pmatrix}\boxed{\quad v\quad} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \boxed{\quad v\quad} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots\\ \vdots & & 0 & \boxed{\quad v\quad} & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{\quad v\quad}\end{pmatrix}}^{23}\right\}12$$

の各行が基底になっている、3 つの誤りを訂正できる $(23,12,7)$-符号です。Hamming 限界式を具体的に眺めると、23 次元空間のベクトルは、2^{23} 個あり、符号語は 2^{12} 個ありますので、1 語あたり 2^{11} の「体積」分割り当てが残っており、語中心半径 3 の各球の「体積」は、符号語の $n=23$ 箇所の座標のうち、1 語において $t=3$ 箇所まで間違う可能性のある点の合計

$$\sum_{j=0}^3 {}_{23}C_j=1+23+253+1771=2048=2^{11}$$

に等しくなって、Hamming 限界式の等号が成り立つ完全符号であることがわかります。

この符号に、上記のようにパリティチェック部分を 1 ビット加えて（G の最後に成分がすべて 1 の縦ベクトルを継ぎ足して）、符号長 24 の**拡張 Golay 符号** $\mathcal{G}_{24}$ ができます。パラメータは $(24, 12, 8)$（この符号は一意的）となりますので、最小距離は 1 増えますが、誤り訂正能力は 3 のままです。こちらの方が後で出てくる重要なものです。その重要性を支える顕著な性質は、0 ベクトル以外の Hamming 重みがすべて $8 = 2^3$ の倍数になっていることで、**triply even** と呼ばれます。当然、重みがすべて $4 = 2^2$ の倍数の場合は **doubly even** です。

3 Graded 代数

次数つき代数とも呼ばれる環 R 上の **graded algebra** とは、環 R 上の可算個の moduleA_n について、

$$A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$$

となっていて、 $R \subset A_0,\ A_n A_m \subset A_{n+m}$ という積が定められているもののことです[1]。この場合には、加法半群 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ について、$\mathbb{N}_0$**-graded** とも呼ばれます。A_n の構造によって、graded ring, graded module などもあり、次数部分を $\mathbb{Z}$ などに変えたバリエーション（$\mathbb{Z}$-graded ）もあります。各 A_n の元は、**次数 n の homogeneous element （同次要素・斉次要素）**[2]とも呼ばれます。M が **graded A-module** というときは、A_n-module M_n の直和 $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ になっていて、$A_n M_m = M_{n+m}$ が成り立つもののことを言います。同様な性質で定められる graded イデアルの場合には、**同次イデアル**とも呼ばれます。

代表例として、単項式の空間から多項式環への構成を構造的に拡張したと考えられる、ベクトル空間 V の**テンソル代数** $T(V)$、すなわち、

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes^{n} V$$

（$\bigotimes^0 V$ は係数体とする）において、積を

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m$$

と定めたものを挙げておきます。上記の積を考えず、V が Hilbert 空間のとき（でなくてもそう呼んでいる場合がありますが）**full Fock 空間** と呼ばれているもので、各次数部分を対称化 (resp. 反対称化）したものは、**Boson** (resp. **Fermion**) **Fock 空間** と呼ばれています。Fermion Fock 空間で、積を復活させるなら、**Grassman 代数** で、こちらのほうがなじみが深いかもしれません。しかし後に述べる頂点代数では、Fock 空間を少し違った意味に使っているようです。

[1] この概念をネットで色々検索していましたが、決定版がなかなかなく、たまたま [5] を見たら、手際よく書いてありました。この本は代数で知りたいことが何でも載っていて学生時代から重宝している本で、同著者の表現論の本と合わせてお世話になり続けている名著です。

[2] 学校数学的に言えば「n 次の項」といったところでしょうか。

ついでながら、Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し、可換図式 $\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & A \arrow[d, "\exists 1 h"] \\ & A' \end{tikzcd}$ を満たす A を**普遍包絡代数** $U(\mathfrak{g})$ といいますが、これも、**テンソル代数** $T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes^n \mathfrak{g}$ を、$x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ で生成される両側イデアルで割ったものとして実現できます。また、**対称代数** $S(\mathfrak{g})$ は、$T(\mathfrak{g})$ を $x \otimes y - y \otimes x$ たちで生成される同次イデアルで割ったものですが、$\mathfrak{g}$ 自体が可換な場合には $U(\mathfrak{g})$ と一致します。

4　超代数

体の拡大と同じように、代数の拡大を考えます。たとえば、複素数体を $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ と考えた場合、当然ながら前者の $\mathbb{R}$ は体ですが、後者の $i\mathbb{R}$ は体ではなく線形空間にすぎず、2 乗すると前者の方に吸収されてしまいます。つまりこれは、前者を $R_0 = \mathbb{R}$、後者を $R_1 = i\mathbb{R}$ として、$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ について、$\mathbb{Z}_2$-graded algebra になっています。よくある体の二次拡大や、dual numbers（$X^2 = 1$ とした直和代数 $\mathbb{R} \oplus X\mathbb{R}$）などは、同じ構造を持っています。このように、$\mathbb{Z}_2$-graded algebra $R_0 \oplus R_1$ は、独自の対象と考えられて、**超代数**と呼ばれます（cf. [24]）。代数 R 自身は、$R \oplus \{0\}$ として、自明な超代数とも言えます。通常、$a \in R_0 \cup R_1$ は、いずれかに属することが仮定されていますので、この場合その所属を **parity** と呼んで、$\bar{a} = i$（$a \in R_i$ のとき）と書きます。それで、R_0 は R の **even part**, R_1 は **odd part** としばしば呼ばれます。

基礎体 F の元 α について、$u^2 = \alpha$ となる u を考え、超代数 $F \oplus Fu$ を $A(\alpha)$ とします。この時、$\alpha_k \in F$ について、

$$\mathrm{Cl}(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \bigotimes_{i=1}^{n} A(\alpha_i)$$

を、**Clliford 超代数**と呼びます。これは結合的で、単位元 $1 \otimes \cdots \otimes 1$ を持つ代数です。特に可換超代数

$$G_n = \mathrm{Cl}(0, ..., 0)$$

を、**Grassman 超代数** といいます。G_n は、$u_i^2 = 0,\, u_i u_j = -u_j u_i$ となる n 個の u_i と単位元 1 で生成される代数です。交換関係から、実際には

$$u_{i_1} \cdots u_{i_k} \qquad (1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_k \leqq n)$$

となる元と 1 で生成されることがわかります。G_n の even part は、このうち偶数個の積の元と 1 で生成される代数で、odd part は、このうち奇数個の元の積になっているもので生成されますので、G_n 自身「超代数」です。また、$G_n \otimes G_m \cong G_{n+m}$ となることがわかり、

$$ab = (-1)^{\bar{a}\bar{b}} ba$$

という、**super-commutativity** という性質をもっています（[24]）。

G_0 を Lie 代数、G_1 を G_0-module とするとき、超代数 $G = G_0 \oplus G_1$ が、次の性質を持つ括弧積 $[,]$ を有するとき、**Lie 超代数** といいます：$i, j \in \{0, 1\}$ について、$a \in G_i$, $b \in G_j$ に対して、

$$[a, b] = -(-1)^{ij}[b, a], \quad [a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{ij}[b, [a, c]].$$

一般に、通常の超代数 G に

$$[a, b] = ab - (-1)^{\bar{a}\bar{b}}ba$$

で括弧積を定めると、Lie 超代数になります。また、Lie 超代数 G と、先ほどの Grassman 超代数とのテンソル積 $G \otimes G_n$ も Lie 超代数になります（[6]）。

5 Heisenberg 代数・Virasoro 代数

頂点作用素代数を導入するにあたって、いくつか重要な Lie 代数を押さえておく必要がありますので、基礎的なテキスト [2] から拾っておきます。$\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ を t 変数の次数有限な複素係数の Laurent 多項式（t^n が $n < 0$ のマイナス乗部分の項もある「多項式」）のなす代数としましょう。

$\mathfrak{h}$ を非特異な対称双線形形式を持つ有限次元可換 Lie 代数とし、$\tilde{\mathfrak{h}}$ をその「アフィン Lie 代数」$\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \bigoplus \mathbb{C}K$ （K は他と可換な元）とします。すると、$\mathbb{Z}$-graded な部分代数

$$\tilde{\mathfrak{h}}' = \bigoplus_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \mathfrak{h} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}K = \mathfrak{h} \otimes (t\mathbb{C}[t] \oplus t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}K$$

は、$\tilde{h}$ の可換子環であり、これが **Heisenberg 代数**となります。2 番目のスタイルから、正部分・負部分 $\tilde{\mathfrak{h}}'^{\pm} = \mathfrak{h} \otimes (t^{\pm 1}\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$ に分解でき、三角分解がえられます[3]：

$$\tilde{\mathfrak{h}}' = \tilde{\mathfrak{h}}'^{-} \oplus \mathbb{C}K \oplus \tilde{\mathfrak{h}}'^{+}.$$

さて、Lie 代数の括弧積が「積」と呼ばれるいくつかの理由の一つとして、[18] には、Witt 代数が挙げられています。Laurent 多項式環自身 $A = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ では、$dt^n/dt = nt^{n-1}$ によって、形式的に微分が可能になります。ここで、L_k を

$$L_k = -t^{k+1}\frac{d}{dt}$$

という微分作用素とします。この作用素全体によってまた、代数 $\mathrm{Der}(A)$ が生成されます。すると、元の積から交代積として括弧積が導入できますから、それが何物であるかを求めると、$f \in A$ について、

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n]f &= (L_mL_n - L_nL_m)f = -L_mt^{n+1}f' + L_nt^{m+1}f' \\
&= t^{m+1}((n+1)t^nf' + t^{n+1}f'') - t^{n+1}((m+1)t^mf' + t^{m+1}f'') \\
&= (n+1)t^{m+n+1}f' + t^{n+m+2}f'' - (m+1)t^{n+m+1}f' - t^{n+m+2}f'' \\
&= (n-m)t^{m+n+1}f' = (m-n)L_{m+n}f
\end{aligned}$$

[3] 三角分解の名前の由来は行列の対角を除いた上三角、下三角から来ていますが、無限の場合の話が余りないようなので付記します。対角に沿った成分が同じで、 Laurent 多項式 $p(t) = \sum_n a_nt^n \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ の各係数 a_n（対角部分はすべて a_0）になっている行列は **Laurent 行列** M と呼ばれる無限次元行列ですが、この対応 $p(t) \mapsto M$ は代数同形なので、まさに対角を除いた上三角部分が $t\mathbb{C}[t]$ に、下三角部分が $t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ に対応します。

となって、

(1-1) $$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$$

のように係数 $m-n$ がつきますが、何となく積らしいことがわかります。この代数は、**Witt 代数** W と呼ばれ、中心拡大として Virasoro 代数、さらには、頂点作用素代数として広がりを見せる重要なものです。実際には、(1-1) を満たす基底を持つ代数として抽象的に特徴づけることができます。一方、1 次元トーラス $\mathbb{T} = \{e^{i\theta}\}$ 上の滑らかで有限の Fourier 展開を持つ複素関数 f について、$f\frac{d}{d\theta}$ という微分作用素のなす線形空間 V の基底という具体的な設定においても、(1-1) の関係式を導いて Witt 代数は得られます。

Virasoro 代数は、超弦理論にも関連のある Lie 代数で、(1-1) 式が以下のように一部変更された, **中心荷電**と呼ばれる中心元 c が付加された, Witt 代数の 1 次元拡大 $\mathrm{Vir} = W \oplus \mathbb{F}c$ です：L_n に対応するものを d_n と書くと、$n \neq m$ のときの括弧積は

(1-2) $$[d_m, d_n] = (m-n)d_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{1}{12}(m^3-m)c.$$

ここで、δ は所謂 Kronecker のデルタで、2 つの下付き変数が等しいときのみ 1 でそれ以外は 0 のものですので、特別なケースのみ、関係式に余計な項が加わるだけです。この不思議な係数の理由は以下の通りです：

$$[d_m, d_n] = (m-n)d_{m+n} + \gamma_{m,n}c$$

となる $\gamma_{m,n} \in \mathbb{F}$ がありますが、括弧積の性質、Jacobi 恒等式から

$$\gamma_{m,n} + \gamma_{n,m} = 0, \quad (n-m)\gamma_{m+n,p} + (n-p)\gamma_{n+p,m} + (p-m)\gamma_{p+m,n} = 0$$

がわかります。$p = 0$ とすると、

$$(m+n)\gamma_{m,n} = (m-n)\gamma_{m+n,0}$$

となり、$d'_k = d_k + \beta_k c$ という 1 次変換をうまく施すことにより、$\gamma_{m+n,0} = 0$ と仮定できます。このとき、$m+n \neq 0$ ならば、$\gamma_{m,n}$ はすべて 0 となり、上式で $\delta_{m+n,0}$ が必要になります。また、$m+n+p = 0$ とすることで、

(1-3) $$(m-n)\gamma_{m+n,-(m+n)} + (2m+n)\gamma_{n,-n} = (2n+m)\gamma_{m.-m}$$

がわかり、これを満たす解を構成するのは面倒ですが、

$$\gamma_{k,-k} = \alpha(k^3-k) = \alpha k(k+1)(k-1)$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+m)\gamma_{m,-m} - (2m+n)\gamma_{n,-n}}{\alpha} &= (2n+m)(m^3-m) - (2m+n)(n^3-n) \\
&= 2mn(m^2-n^2-(1-1)) + (m^4-n^4-(m^2-n^2)) \\
&= (m^2-n^2)(2mn+m^2+n^2-1) = (m-n)(m+n)\left((m+n)^2-1\right) \\
&= (m-n)(m+n)(m+n+1)(m+n-1) = \frac{(m-n)\gamma_{m+n,-(m+n)}}{\alpha}
\end{aligned}$$

となって (1-3) が成立し、上記の 3 次式が解であることが確認できます（[2, Prop. 1.9.4]）。$\alpha = 1/12$ は、Virasoro 代数の表現を考えるうえで、c を Heisenberg 代数の次元に対応させるための調整（[2, Theo. 1.9.6]）ということのようです。

6 頂点作用素代数 (VOA)

VOA は超弦理論など物理ともかかわりが深いらしい（頂点作用素は物理由来である）のですが、代数としてはもともとは有限単純群の分類問題から生まれたようです。Heisenberg Lie 代数、Virasoro 代数やアフィン Lie 代数などを含む対象で、普遍包絡代数が「展開環」と呼ばれるように、（Taylor 展開的に直和分解ができ、Virasoro 代数を作る Virasoro 元と真空ベクトルを含むものですが）定義はやはりかなり込み入ったものであり、いろんな導入があるようです（特に Taylor 展開的に空間を非負整数の直和とみるか、少しずらして（位数の下限を有界にして）Laurent 展開的に見るかでも流儀が違います。ここでは留数的なものが有用そうなので後者で述べます）：ここで、形式的なべき級数環を $R[[X]]$ で、その自己準同形環を $\mathrm{End}(R[[X]])$ あらわすことにしておきます。

VOA とは、線形空間 $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ で、**頂点作用素**と呼ばれる次の線形写像

$$Y(\ ,z) : V \to \mathrm{End}(V[[z,z^{-1}]]),\ v \mapsto Y(v,z) = \textstyle\sum_i v_i z^{-i-1} \quad (v_i \in \mathrm{End}(V))$$

を持ち、次の条件を満たすものです（z は他と可換な不定元）：

1. $Y(I,z) = id_V$ となる**真空ベクトル** $I \in V_0$ があり、$v_{-1}I = v$, $n \geqq 0 \Rightarrow v_n I = 0$.
2. $Y(v,z)I \in V[[z]]$, $\lim_{z\to 0} Y(v,z)I = v$. 十分大きな n について、$u_n v = 0$.
3. $\dim V < \infty$ で、十分小さい n について、$V_n = 0$.
4. 次の性質を持つ **Virasoro 元**（**conformal 元**）$w \in V_2$ がある：$L(n) = w_{n+1}$ として、∃**中心電荷**（**VOA の階数**）C（スカラー）；
   $$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}C$$
   $L(-1)$ は微分作用素；$[L(-1), Y(v,z)] = \frac{d}{dz}Y(v,z)$.
   $L(0)$ は整数固有値のみを持ち、直和分解の次数に対応:$v \in V_n \Rightarrow L(0)v = nv$.
5. **局所可換性**（**Jacobi 恒等式**と同値）：十分大きな n について、z, w を他と可換な不定元として
   $$(z-w)^n Y(v,z)Y(u,w) = (z-w)^n Y(u,w)Y(v,z).$$

また、VOA V について、超代数の構成に必要な V**-加群** $(M, Y_M(\cdot,z), \partial_M)$ とは、$\mathbb{Z}_2$-graded な線形空間 $M = M_0 \oplus M_1$, 線形写像 $Y_M(\cdot,z)$: $V \otimes_{\mathbb{C}} M \to M((z))$, M の $\mathbb{Z}_2$-homogeneous な自己準同形 ∂_M で以下の性質を満たすものです（元の Y は Y_V で表します）：

1. $Y_M(I,z) = id_M$, $(Y_M(a,z) = \sum_n a_n z^{-n-1})$.
2. $a \in V^i$, $v \in M^j$ に対し、$Y_M(a,z)v \in M^{i+j}[[z]]$, $\quad (i,j \in \mathbb{Z}_2)$.

3. $Y_M(L(-1)a,z) = [\partial_M, Y_M(a,z)] = \frac{d}{dz}Y_M(a,z)$.

4. $\mathbb{Z}_2$homegeneous な $a, b \in V$ と $v \in M$ について、Jacobi 恒等式を満たす：

$$z_0^{-1}\left(\sum_n \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0}\right)^n\right) Y_M(a,z_1)Y_M(b,z_2)v - (-1)^{\bar{a}\bar{b}}Y_M(b,z_2)Y_M(a,z_1)v$$
$$= z_2^{-1}\left(\sum_n \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2}\right)^n\right) Y_M\big(Y_V(a,z_0)b, z_2\big)v.$$

V の**自己同形** $\sigma \in \mathrm{Aut}V$ とは、$\sigma Y(a,z)b = Y(\sigma a, z)$ を満たす, w や I を変えない V の線形自己同形のことですが、その位数を $k = |\sigma|$ と書くとき、

$$V = V^0 \oplus V^1 \oplus \cdots \oplus V^{k-1}, \qquad (V^r = \{a \in V | \sigma a = e^{2\pi i r/k}a\})$$

という「固有空間分解」が可能になります。それで、**σ-twisted V-加群** $(M, Y_M(\cdot, z))$ とは、今度は、頂点作用素 $Y_M(\cdot, z)\colon\ V \otimes M \to M[[z^{1/k}]]$ が、また $Y_M(I,z) = id_V$ を満たし、

$$Y_M(a,z) = \sum_n a_{n+r/k}z^{-n-1-r/k} \qquad (a_{n+r/k} \in \mathrm{End}(M))$$

となり、Jacobi 恒等式と同等な次式を満たすもののことです (cf. [22])：

$$(z_1 - z_2)^k Y_M(a,z_1)Y_M(b,z_2) = (z_1 - z_2)^k Y_M(b,z_2)Y_M(a,z_1).$$

VOA は、様々ないい性質を持っています。例えば、VOA が**単純**であるとは、自明でないイデアルを持たないことで、V 自身を V-加群とみたとき（adjoint 加群とも言います）既約であることと同値ですが、次のような**量子ガロア理論**ともよばれる「ガロア対応」が成り立つことも知られています（cf. [21, 22]）：「単純 VOA V の $\mathrm{Aut}V$ の有限部分群 G について、G による不変部分代数を V^G と書くとき、G の部分群と V^G を含む部分 VOA は 1 対 1 に対応する」

7　月光への号令 — 符号・格子・VOA

さて、準備にずいぶんかかりましたが、いよいよ符号から VOA の構成です。Frenkel-Lepowsky-Meurman らによって、次のきれいな関係が「符号」「格子」「VOA」の間に見つかりました。符号は２元コードのうち、**doubly even** であるものと、偶格子（格子に内積がありますが、同じ格子の内積の値＝ノルムが偶数のもの）が VOA に対応しています。符号自体もともと線形空間なので内積を持っていますが、その内積での直交補（**双対符号**）と等しくなる符号を **self-dual** なコードといい、それと、**ユニモジュラー**[4]な格子、**holomorphic**[5]な VOA へと、関連がつきます（[19, 7]）。

[4] 格子の内積で、$L = L^\perp$ ど同値になる

[5] 自身以外に既約加群を持たないもの

長さ n の 2 元 doubly even 符号 $\mathcal{C}$ から階数 n の偶格子を作る方法は（3 つ目は $n \in 8\mathbb{Z}$ のときのみですが、一番重要なものです）、

$$
\begin{aligned}
A_2(\mathcal{C}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(v_i) \in \mathbb{Z} \mid (v_i) \mod 2 \in \mathcal{C}\} \\
B_2(\mathcal{C}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(v_i) \in \mathbb{Z} \mid (v_i) \mod 2 \in \mathcal{C}, \sum v_i \in 4\mathbb{Z}\} \\
L_2(\mathcal{C}) &= \begin{cases} B_2(\mathcal{C}) + \frac{\mathbb{Z}}{2\sqrt{2}}(1,1,\cdots,1) & n \in 16\mathbb{Z} \\ B_2(\mathcal{C}) + \frac{\mathbb{Z}}{2\sqrt{2}}(-3,1,\cdots,1) & n \in 16\mathbb{Z}+8 \end{cases}
\end{aligned}
$$

です。階数 n の偶格子があれば、さらに VOA を（これも 3 種類）作ることができます: 線形空間 $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ は可換 Lie 代数とみなせますので、付随するアフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\mathbb{K}$ の可換部分代数 $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ の**対称代数**（可換なので、普遍包絡代数と同じ）を $S(\mathfrak{h}^-)$ とします。群環 $\mathbb{C}L$ について、まず、$V_L = S(\mathfrak{h}^-) \otimes \mathbb{C}L$ が VOA となり（A_2 に対応）、**格子 VOA** といいます。B_2 に対応するものは、$-1 \in \mathrm{Aut}(L)$ に対応する「持ち上げ」$\theta \in \mathrm{Aut}(V_L)$ についての固定部分空間 $V_L^+ = \{v \in V_L \mid \theta(v) = v\}$ が求める部分 VOA で（**$\mathbb{Z}_2$-orbifold model**）超代数への拡張を示唆しています。

ここで格子が unimodular であることを仮定します。このとき、既約 θ-twisted V_L-加群[6]から得られる既約 V_L^+-加群は、量子物理同様 2 種類しかなく、**ウェイト**[7]が整数のものと、半整数のものです。ここで、格子が対称内積を持ち、有理的（$\langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{Q}$）と仮定し、整数重みの方を $V_L^{T,+}$ とすれば、超代数 $\tilde{V}_L = V_L^+ \oplus V_L^{T,+}$ は VOA となることが示されています。これが、L_2 に対応する VOA であり、この最後の構成法を **$\mathbb{Z}_2$-orbifold construction** と呼びます。

重要な具体例として**（拡張）Golay 符号** $\mathcal{G}_{24}$, **Leech 格子** L[8] , **Moonshine VOA**$V^\natural$ が対応し、それぞれの自己同型群が **Mathieu 群** M_{24}, **Conway 群** Co_1, **モンスター群** M になるという意味で、有限単純群の頂上を表しています。一応、関係は一方向ですが、宮本 [16] は $V^\natural$ と、ある 48 の長さを持つ符号との双方向の対応を示しています。

---

[6] θ の位数 k で、VOA の定義の $\mathbb{Z}$ の部分を $\frac{1}{k}\mathbb{Z}$ で置き換えて定義されたもの（Virasoro 関連は省く）。

[7] 加群の**ウェイト**は固有値のようなもので、双対空間の元 λ で $hm = \lambda(h)m$（$\forall h \in \mathfrak{h}$）を満たす加群の非零元 m が存在するもののこと。

[8] Hadamard 行列（成分が ± 1 の n 次行列で $\sqrt{n}$ で割ると、ユニタリになるもの）を使った定義では、$A + A^* = -2I$ となるものが同形を除いてユニークなので、$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & A-I \\ O & 4I \end{pmatrix}$ の行ベクトルで生成される格子. A の一例は、下記の行列 :

$$
\begin{pmatrix}
-1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1
\end{pmatrix}
$$

8　2 次元イジングモデルと符号 VOA 〜 おわりに

とりあえず最も基本的な対応について、符号 → 格子 → VOA の流れを見てきましたが、本文中にも触れましたように、現在では様々なバリエーションができています。ここではさわりだけにしておきます。

符号と密接な関係にある単純な VOA を得る方法のひとつは、前述の Virasoro 代数 Vir を思い出してください。Vir-加群 $L(c,h)$ とは、中心荷電 C と、最高ウェイトと呼ばれる h（両方スカラー）について、

$$L(c,h) = \{v \,|L_n v = 0 \ (n > 0), \quad L_0 v = hv, \quad cv = Cv\}$$

のことで ([10])、Vir の唯一の既約最高ウェイト加群になっています。$L(1/2,h)$ は、完全可約（既約の直和）で、既約加群は最高ウェイト $h = 0, 1/2, 1/16$ に限ることが示されています。これらは、**イジング模型** と呼ばれる VOA です。

ここで、$\mathcal{C}$ を even な長さ n の符号とすれば、

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathcal{C}} L\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha_1}{2}\right)\otimes\cdots\otimes L\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha_1}{2}\right)$$

は VOA となることがわかり、宮本の**符号 VOA** と呼ばれています ([17])。

また、$V^\natural$ と長さ 48 の triply even 符号との密接な関連性も指摘されています。ここで、2 つの同じ長さの 2 元符号 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$ について、$\mathcal{C}_1 * \mathcal{C}_2$ を各符号語 x_1, x_2 の論理積 $x_1 \wedge x_2$（各成分の積）で生成される線形符号とし、$\mathcal{R}_j$ をその双対符号 $(\mathcal{C}_j * \mathcal{C}_j)^\perp$ の中の符号語 x で、重みが 8 の倍数で、$y \in \mathcal{C}_j$ との論理積 $x \wedge y$ の重みが 4 の倍数となっている語が作る部分符号とします。このとき、 [1] では、長さ 48 の maximal triply even 符号について、長さ 24 の doubly even 符号 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2$, 全単射 $f\colon\ \mathcal{C}_1/\mathcal{R}_1 \to \mathcal{C}_2/\mathcal{R}_2$ が取れて、

$$D \cong \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in \mathcal{C}_1, x_2 + \mathcal{R}_2 \in f(x_1 + \mathcal{R}_1)\}$$

となることまで解明されています。これに基づくとすべての長さ 48 の triply even 符号が分類され、データベースとして

http://www.st.hirosaki-u.ac.jp/~betsumi/triply-even/

で公開されていることは、[17] で述べられています。

ここでは、道具だてが用意しきれず詳しく述べる余裕がありませんでしたが、この方面の研究は今後もさらに広がりを見せ、もっと「いい眺め」を見せてくれると期待しているところです。頂点作用素代数といわゆる作用素代数は別物ですが、「共形場理論」を通じて、物理的な方面から関わっています [4, 8]。ここでは手に余るので、専門家の河東先生の解説 [8] などを参照ください（因みに、この方が符号理論の解説をしていることは一般的にはあまり知られていないと思います [9])。

以上のように、さまざまな分野の人が共同して理論を発展させていくさまは、特に私がかかわっている情報科学の分野では頻繁にありますが、学問的な有用性を実感させてくれる好例の宝庫です。今後のさらなる発展に期待を込めて、拙文を閉じたいと思います。

参考文献

[1] K.Betsumiya and A.Munemasa: On triply even binary codes, 2011, Preprint. http://arxiv.org/abs/1012.4134v3

[2] I.Frenkei, J.Lepowsky and A.Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Academic Press, 1989.

[3] I.Gordon, Infinite-dimensional Lie algebras, 2008, http://www.maths.ed.ac.uk/~igordon/LA1.pdf

[4] I.F.Gabbiani and J.Fröhlich: Operator algebras and conformal field theory, Comm. Math. Phys., **155**, (1993), 569–640.

[5] 服部昭, 「現代代数学」, 朝倉書店, 1977 年.

[6] V.G.Kac: A Sketch of Lie Superalgebra Theory, Commun. math. Phys., **53**(1977), 31–64. http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.cmp/1103900590

[7] 北詰正顕, 散在型単純群の周辺, 2008, http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp08_files/kitazume.pdf

[8] 河東泰之: 共形場理論と作用素環，頂点作用素代数, 日本数学会 2005 年年会企画特別講演. http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/msj05.pdf

[9] 河東泰之: 誤り訂正符号と数学, 2011. http://ocw.u-tokyo.ac.jp/lecture_files/gf_23/7/notes/ja/07_kawahigashi.pdf

[10] C.H.Lam and H.Shimakura, Ising vectrs in the vertex operator algebra V_Λ^+ associated with the Leech lattice Λ, http://arxiv.org/abs/0810.5395v1

[11] 宮本雅彦, 頂点作用素代数入門, 数理解析研究所講究録, **867**(1994), 88–98. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0867-09.pdf

[12] M.Miyamoto, Binary codes and vertex operator (super)algebras, J. of Algebra, **181**(1996), 207–222.

[13] 宮本雅彦, コード頂点作用素代数の表現, 数理解析研究所講究録, **991**(1997), 141–156. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0991-18.pdf

[14] 宮本雅彦, 頂点作用素代数入門とコード頂点作用素代数の表現, 数理解析研究所講究録, **997**(1997), 121–133. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/0997-09.pdf

[15] 宮本雅彦, コード頂点作用素代数とクリフォード代数, 数理解析研究所講究録, **1063**(1998), 121–128. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1063-16.pdf

[16] M.Miyamoto, A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, Ann. of Math., **159** (2004), 535–596.

[17] 宗政昭弘, ムーンシャイン頂点作用素代数と二元符号, 2010, http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~munemasa/documents/20101002.pdf

[18] I.Goprdon, Infinite-dimensional Lie algebras, 2008,
http://www.maths.ed.ac.uk/~igordon/LA1.pdf

[19] 島倉裕樹, 頂点作用素代数における, 符号・格子との類似について, 2008,
http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp08_files/shimakura.pdf

[20] 寺田至・原田耕一郎, 「群論」, 岩波書店, 2006 年.

[21] 山田裕理: 頂点作用素代数のオービフォールド, 第 49 回代数学シンポジウム, 2004.
http://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp04_files/yamada.pdf

[22] H.Yamauchi: A theory of simple current extensions of vertex operator algebras and applications to the moonshine vertex operator algebra, Ph.D. Thesis, Univ. of Tsukuba, 2004,
http://www.math.twcu.ac.jp/~yamauchi/math/phd/myphd.pdf

[23] 山内博: 枠付き頂点作用素代数の構成, 数理解析研究所講究録 **1218**(2001), 69–82.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1218-6.pdf

[24] N.Xhukavets: Introduction to Superalgebras, 1999.
http://math.feld.cvut.cz/ftp/natalia/usa/super_texto.pdf

国際数理科学協会へのご案内

国際数理科学協会代表理事

寺岡義伸

国際数理科学協会（ISMS）は、1948 年の創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得てきた Mathematica Japonica(M.J) と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ Scientiae Mathenaticae(SCM) とを発行し、数理科学の発展に貢献してきました。今世紀この両誌を合併、21 世紀 MJ/SCM New Series “Scientiae Mathenaticae Japonicae (SCMJ)” と名称を変更し、純粋数学から応用数理までをカバーする国際的学術誌として発行を続けております。今日まで 260 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の学術誌です。

(1) 日本のみならず、海外 20 カ国に渡る 80 名の著名な教授・研究者が、Editorial Board に参加しています。掲載可能と判断された投稿論文は、印刷版のみならず電子版として掲載されております。SCMJ に掲載された論文は、Mathematical Review や Zentralbatt によって review されています。

(2) SCMJ は、世界中の多くの図書館へ配布されています。SCMJ の印刷版は、関連する研究者グループに積極的に紹介されており、研究者間交流を促進するのに役立っております。

(3) ISMS 年会 : ISMS 会員・非会員が集まり、発表・討論する研究集会が毎年行われています。

[会員に対する特典]

(1) SCMJ の online version へ自由にアクセス可能となります。（プリントも自由です。）

(2) 年間 3 回発行の Scientiae Mathenaticae Japonicae(SCMJ) が配布されます。

(3) Scientiae Mathenaticae Japonicae(SCMJ) への投稿論文が掲載される場合、掲載料は無料になります。

（入会金：無料、　年会費：正会員 6000 円；準会員 4000 円）

国際数理科学協会事務連絡・入会の問合せ先

住所：大阪府堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内
新規入会担当：水落（ミズオチ）
電話：（072）222-1850
E-mail:scm4j@jams.jp