



一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.79/ 2012.1

編集委員：藤井淳一(委員長)

目次

- | | |
|---------------|-----------|
| * 総会開催予定 | * 寄稿(1) |
| * SCMJ 編集委員 | * 寄稿(2) |
| * 井関先生追悼号原稿募集 | * 正会員申込用紙 |
| * ヤポニカ投稿時の注意 | * 会員募集 |

* 総会開催予定

2012年度の総会を3月24日(土)の午後開催を阪大中ノ島センターで予定しています。議題は

- (1) 2011年度決算報告と2012年度の予算報告
- (2) 2011年度事業報告、2012年度事業予定報告
- (3) その他

を予定しています。代議員の方のご出席をお願いします。詳しくは2月末か3月初めに出席の有無をお尋ねいたします。ご出席をお願いします。引き続き、理事会を開催する予定です。こちらの方は委任状が利きませんので出席方お願いいたします。

* SCMJ 編集委員

ご存知のように SCMJ の投稿論文が減少してきています。なお、

下記の2名の方が新しく SCMJ の editor に推薦されました。せいぜい投稿方お願い致します。

- (a) Jun Ichi Fujii (藤井 淳一)
- (b) Department of Arts and Sciences (Information Science), Osaka Kyoiku University,
Asahigaoka, Kashiwara, Osaka 582-8582, Japan
- (b') fujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp
- (c) Operator Theory
- (d) Operator Theory

- (a) Eiichi Nakai (中井 英一)
- (b) Department of Mathematics
Ibaraki University
Mito, Ibaraki 310-8512, Japan

(b') enakai@mx.ibaraki.ac.jp

(c) real analysis, harmonic analysis, Fourier analysis

(d) Real analysis, harmonic analysis, Fourier analysis, function spaces,
singular and fractional integrals

(e) Electronic file

* 井関先生追悼号原稿募集

長年にわたり数学の発展や数理科学協会・国際数理科学協会の運営にご尽力頂きました井関清志先生が3月14日に腎不全のため亡くられました。91歳でした。つきましては、井関先生を偲びまして SCIENTIAE MATHEMATICAE JAPONICAE の特別号として井関先生の追悼号を発行したいと計画しております。

追悼号には井関先生を追悼する研究論文(井関先生のご研究分野に関連する論文)及び、井関先生の数学に関する仕事の紹介・総合報告などを掲載する予定です。そこで、上記論文を皆様から寄せて頂きたいと思っております。形式、記事送付(メール添付か郵送)の締切、送り先は以下の通りです。

- ・形式: JAMS style file を使った LaTeX ファイルが望ましい。
- ・原稿は英語でお願いします。
- ・研究論文については通常の査読を行います。また、井関先生の数学に関する仕事の紹介
- ・総合報告については、タイプミスや内容に関する簡易的な査読を行います。
- ・締切日: 2012年3月30日(金)
- ・送先: 669-1337 三田市学園2丁目1番地 関西学院大学理工学部, 数理科学科

北原 和明 Email: kitahara@kwansei.ac.jp

ご不明な点等ございましたら上記までお問い合わせください。皆様方からの寄稿をお待ちしています。よろしく願い申し上げます。

* ヤボニカ投稿時の注意

Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) の投稿に際しては、従来と少し異なり次の3点を協会宛メールでお送り下さい。

- (1) 原稿の source file (tex file)
- (2) 上記の pdf file
- (3) Submission form の3点です。

これが揃わないために、無駄な時間があったりします。これにより、online 版の掲載が幾分でもはやくなるのではと思っています。ご協力をお願いいたします。なお、editor に送付は従来どおりです。

* 寄稿 (1)

ハルピン工業大学理学部数学科との交流と国際会議について

関西学院大学理工学部 石井 博昭

1 はじめに

2010年3月に大阪大学を早期退職し、関西学院大学理工学部数理科学科に移りました。大阪大学では大学院情報科学研究科情報数理学専攻に所属し、計画数理学講座を担当していました。学部は応用自然科学科応用物理学コースを兼任していました。情報科学研究科ができたのが2002年で、その前は工学研究科応用物理学専攻に属しておりました。ハルピン工業大学理学部数学科との縁の始まりは陳明浩助教授(当時、現在は教授)が1990年10月に中国政府のお金で私の研究室に来られたときからであります。このときは1991年10月までおられて、ファジィ最適化や当時私の研究室の齋藤誠慈講師(今は同志社大学理工学部教授)が始められていたファジィ微分方程式や凸解析の研究と一緒にやりました。その後、毎年齋藤先生と一緒にハルピン工業大学に行き交流を深めていましたが、2001年3月から客座教授をしております。また、2007年8月から2011年7月まで、講座教授として、博士課程の学生2名に研究指導を行って来ました。そのうちの1名である Geyue さんは2008年10月-2009年10月まで、大阪大学大学院情報科学研究科情報数理学専攻計画数理学講座に研究員として在籍していて、ネットワーク上のファジィ最適化の研究をしています。もうすぐ学位取得の見込みです。もう1名は李雪松さんで、この12月に来日して関西学院大学の私の研究室の研究員を来年12月までする予定です。研究はバッチスケジューリングでそのファジィ版への拡張の研究を行っています。

2 ハルピン工業大学理学部数学科について

以下の英文は付教授が我々向けに最近作ってくれた数学科の紹介です。特徴はまさしく国際数理学協会同様、純粋数学全般、数値解析、確率統計等様々な分野をカバーしていることです。また、最近退官された呉教授(Wu Congxin)はSCMJのeditorial board memberであります。専門は関数解析、ファジィ解析、ファジィ微分方程式等であり、中国のファジィ学会の会長をされておりました。

Introduction of Mathematics Department of Harbin Institute of Technology

1. Historical Background

As early as 1950s, there were undergraduate students enrolled in the major of Computational Mathematics in Harbin Institute of Technology.

In 1987, the Department of Mathematics (the former Department of Mathematics and Mechanics) was established although Harbin Institute of Technology was founded in 1921.

Now the Department is one of the four departments in the School of Science.

2.construction

The Department of Mathematics is now composed of one institute: the Institute of Mathematical Science; four researching and teaching groups: Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Computational Mathematics, Probability and Statistics; and one laboratory. There are nearly ninety teachers including over twenty professors and over thirty associate professors.

3. Complete and Rich Teaching Programs

All students from the department will take approximately the same compulsory courses during their first two years. These courses include: mathematical analysis, high algebra, high geometry, theory of probability, computer sciences, English, political science, physics and physical sciences. Beginning in their third academic year, students can select part of the courses according to the requirements of different majors. The Department offers many special courses: ordinary differential equation, partial differential equation, real function, complex function, functional analysis, abstract algebra, differential geometry, topology, mathematical statistics, applied multivariate statistical analysis, mathematical modeling, numerical value algebra, numerical value analysis, data structure, discrete mathematics, general introduction to information science etc.

Graduates trained at the Department have established a solid foundation of basic theories and amassed a wide range of knowledge. Having undergone rigorous mathematical training, they can adjust themselves to different circumstances. Some graduates can further their studies by pursuing Master's and Doctoral degrees; outstanding undergraduates can be recommended to continue for Master's degree without taking qualifying examinations.

The Department of Mathematics is able to confer Doctoral degrees to students in every field of the mathematical sciences as long as the student has completed the required courses and dissertation, and meets the requirements for Doctoral degrees. According to the short term plan, each year the Department enrolls 30 Doctoral candidates, 60 Master's candidates, and 60 undergraduates. Presently, 90 Doctoral students, 120 Master's students, and 240 undergraduates are students of the Department. The Pure Mathematics doctoral subject has a post-doctoral research station.

4. High Qualifying Teachers and Excellent Research Environment

The Department not only has many old professors who are outstanding scholars and academic leaders in mathematical circles around the nation, such as Wu Congxin who founded one of the two research centers on Orlicz Spaces, but also a number of knowledgeable middle-aged teachers, who have high academic attainments and are specialized in different fields. With the support and assistance from elder professors, these young scholars play an important role in research and teaching; some of them have become academic

leaders in their respective fields.

Faculty members have a wide range of research fields including dynamical systems, nonlinear analysis, harmonic analysis, complex analysis, topology, group theory, number theory, partial differential equations, mathematical physics, information science, computational mathematics, probability and statistics, etc.

Faculty members in the Department have frequently produced original research results and published numerous academic papers. Since 2006, the Department has published over 300 papers on famous mathematical journals, such as Proceedings of Royal Society A, Archive of Rational Mechanics and Analysis, Mathematics of Computation, Journal of Differential Equations, Journal of Algebra, etc.

5. Excellent Student Sources

Highlighted by the first class teaching and research environment, strong faculty, and glorious history, the Department attracts outstanding students from all over China. Excellent student sources have ensured the first rate quality of the Department.

6. International Cooperation

The Department has close relationships with scholars from universities in 12 countries, for example: Professor Wu Congxin, Fu Yongqiang and Chen Minghao have a lot of cooperation with Professor Hiroaki Ishii and Seiji Saito in Japan. Cooperation and exchanges are carried out via exchanging students, faculty and research staff, holding academic conference and cooperating in scientific research.

ハルピン工業大学自身についての特筆すべき点は中国の宇宙開発の中心であり、中国で初めて有人ロケットを開発したことです。

3 国際会議について

この私的とも思われる寄稿をした目的は陳教授とも話していて、国際数理科学協会の研究集会をハルピン工業大学数学科でするのはどうかとなったことです。もしするとしても再来年になるかと思われますが。ハルピンは冬は零下 20 度、場合によっては零下 40 度にまでなっていて、街を流れている松花江が凍りついて車が走行できるぐらいになるということです。氷祭りで有名らしいです。もともとはロシア人が作った街で伊藤博文が安重根に暗殺された地として有名です。非常に美しい街で、少なくとも OR グループだけでも研究集会をしようかと思っています。もちろんその結果は SCMJ に投稿できれば一石二鳥かと思います。

* 寄稿 (2)

古田不等式 25 年

大阪教育大学 数学教室 藤井 正俊

古田不等式は、1987年アメリカ数学会の紀要に発表されました。

T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.

今年ちょうどその25周年にあたり、筆者の視点からその発展を検証してみたいと思います。

1 Löwner-Heinz 不等式から古田不等式への道

ここでは、Hilbert 空間上の有界線形作用素を扱いますが、Hilbert 空間が有限次元の場合は、行列の話となります。エルミート行列にあたるのが自己共役作用素 ($A = A^*$ を満たす) で、任意のベクトル x に対して、 (Ax, x) が実数となることと同値です。特に、 $(Ax, x) \geq 0$ が任意のベクトル x に対して成り立つ場合、 A を正作用素と言い、 $A \geq 0$ と表します。これによって、自己共役作用素間に順序 $A \geq B$ が、 $A - B \geq 0$ により定義できます。

さて、作用素 (行列) の積に関する非可換性が、端的にその姿を現すのが、この順序についての保存性の振る舞いです：

Example. t^2 は、順序を保存しない。つまり、

$$A \geq B, \quad A^2 \not\geq B^2$$

をみたす A, B がある。実際、次の例はよく知られています；

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

それでは、順序を保存する冪関数は完全に規定されるのだろうか。それに対する答えが次の有名な不等式です、[20], [23] and [24]:

Theorem 1.1 (Löwner-Heinz 不等式 (LH)). $0 \leq p \leq 1$ に対して、 t^p は順序を保存する。すなわち、

$$A \geq B \geq 0 \implies A^p \geq B^p.$$

上の2つの事実を組み合わせると、(LH) は、次のように表現できることがわかります：
 t^p が順序を保存する必要十分条件は、 $0 \leq p \leq 1$ である。

詳しく説明はしませんが、(LH) の本質的な部分は、 $p = \frac{1}{2}$ の場合です：

$$A \geq B \geq 0 \implies A^{\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{1}{2}}.$$

これを言い換えると次のようになります： $A, B \geq 0$ に対して、

$$AB^2A \leq 1 \implies A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

仮定の $AB^2A \leq 1$ は、ノルム不等式 $\|AB\| \leq 1$ と同値になります。そうすると、スペクトル半径 $r(\cdot)$ の交換可能性 $r(XY) = r(YX)$ より、

$$\|A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\| = r(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}) = r(AB) \leq \|AB\| \leq 1.$$

が得られます。この議論は我々を Pedersen による Löwner-Heinz 不等式の証明に導きます。実際、

$$I = \{p \in [0, \frac{1}{2}]; A \geq B \geq 0 \Rightarrow A^{2p} \geq B^{2p}\}$$

とすると、 I は凸集合になることが以下のようにして示せます。

まず、 $A^pB^{2p}A^p \leq 1$ 、 $A^qB^{2q}A^q \leq 1$ とすると、 $\|A^pB^p\| \leq 1$ 、 $\|B^qA^q\| \leq 1$ が成り立ちます。そうすると、

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{p+q}{2}}B^{p+q}A^{\frac{p+q}{2}}\| &= r(A^{\frac{p+q}{2}}B^{p+q}A^{\frac{p+q}{2}}) = r(A^{p+q}B^{p+q}) = r(A^pB^pB^qA^q) \\ &\leq \|A^pB^p\| \|B^qA^q\| \leq 1. \end{aligned}$$

これは、 $2p, 2q \in I$ ならば、 $p+q \in I$ を意味しています。よって、 I が凸集合であることがわかります。

さて、(LH) における $p = \frac{1}{2}$ の場合に関連して、Chan-Kwong [4] は、次の予想を立てました。

$$A \geq B \geq 0 \implies (AB^2A)^{\frac{1}{2}} \leq A^2.$$

この成否は大いに話題になり、大抵の人は成立する方に傾いていたように思います。しかし、その成立の証明は、古田による冒頭の論文まで待たねばなりません。ここで、この予想についての重大な事実を述べておかねばなりません。もしこの予想が正しければ、もっと強い結果;

$$A \geq B \geq 0 \implies (BA^2B)^{\frac{3}{4}} \geq B^3.$$

がもたらされるという事実です。そのために、次の補題を用意します。

Lemma 1.2. $p \in \mathbb{R}$ に対して、 $(X^*A^2X)^p = X^*A(AXX^*A)^{p-1}AX$ が成り立つ。ただし、 $A > 0$ 、 X は可逆とする。

Proof. まず、 $Y^*(YY^*)^nY = Y^*Y(Y^*Y)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) は簡単に確かめられます。よって、 $Y^*f(YY^*)Y = Y^*Yf(Y^*Y)$ が多項式 f に対しても、さらに、適当な区間上の連続関数 f に対しても成立することになります。これを $f(x) = x^{p-1}$ 、 $Y = AX$ に適用することにより、補題は証明できます。□

これを用いると、Chan-Kwong 予想の改良は以下のように簡単に行えます：

$$\begin{aligned} (AB^2A)^{\frac{3}{4}} &= AB(BA^2B)^{-\frac{1}{4}}BA = AB((BA^2B)^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}BA \\ &\leq ABB^{-1}BA = ABA \leq A^3. \end{aligned}$$

この事実は、彼らの予想は彼らの枠を飛び越え、より大きなものが生息していることを暗示させていたとも言えるでしょう。このような背景の下、古田不等式は誕生したのではないかと思います。

古田不等式 (FI) If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$,

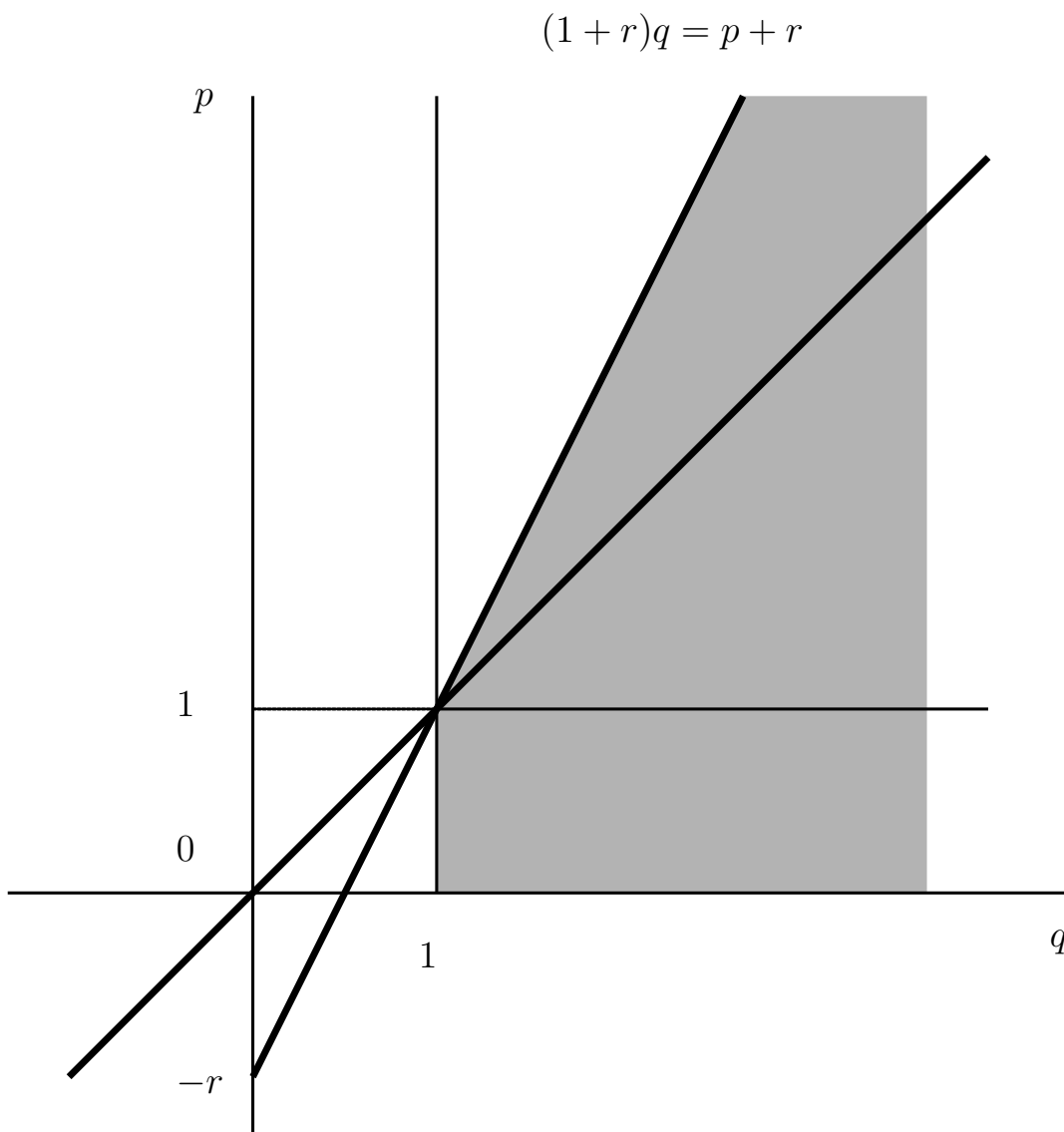
(i)
$$(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

(ii)
$$(B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with

(*)
$$(1+r)q \geq p+r.$$



[14], [15], [5], [21], [25], [19] を参照して下さい。

Berberian は, (*) で定められる領域の図を "Rosetta Stone" だと述べています。ついでながら, 図 (*) が, qp -座標によって, 表現されていることも Berberian のコメントに込められているのではないかと考えています。

次に, (FI) の構造を明確にするために, 作用素平均によるアプローチを試みてみます。まず始めに, Löwner-Heinz 不等式の主張「 t^α は, $\alpha \in [0, 1]$ のとき, 順序を保存する」は, 久保-安藤の作用素平均の理論により, 作用素 α -幾何平均 \sharp_α を誘導します。 $\alpha \in [0, 1], A > 0$ に対して,

$$A \sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}$$

一見, 複雑なように見えますが, 正数の場合には, $a \sharp_\alpha b = a^{1-\alpha}b^\alpha$ となっています。参照 [22], [1].

ここで, 以下よく使われる便利な公式を挙げておきたいと思います。

Lemma 1.3. For $X, Y > 0$ and $a, b \in [0, 1]$,

- (i) *monotonicity*: $X \leq X_1$ and $Y \leq Y_1 \implies X \sharp_a Y \leq X_1 \sharp_a Y_1$,
- (ii) *transformer equality*: $T^*XT \sharp_a T^*YT = T^*(X \sharp_a Y)T$ for invertible T ,
- (iii) *transposition*: $X \sharp_a Y = Y \sharp_{1-a} X$,
- (iv) *multiplicativity*: $X \sharp_{ab} Y = X \sharp_a (X \sharp_b Y)$.

これだけの準備の下で, 古田不等式を幾何平均を使って書き直してみます:

(FI) If $A \geq B > 0$, then

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A \quad \text{for } p \geq 1 \text{ and } r \geq 0. \quad (1)$$

このように (FI) を表現すると, 必然的に次の亀井 [21] による改良を述べておかねばなりません。これは仲間内では a satellite inequaqlity of (FI), (SF) と呼ばれています:

Theorem 1.4 (Satellite inequality (SF)). If $A \geq B > 0$, then

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B \leq A \quad \text{for } p \geq 1 \text{ and } r \geq 0. \quad (2)$$

Proof. As the first stage, we assume that $0 \leq r \leq 1$. Then the monotonicity of \sharp_α ($\alpha \in [0, 1]$) implies that

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p = B.$$

Next we assume that for some $r > 0$,

$$A \geq B > 0 \implies A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq B \leq A$$

holds for all $p \geq 1$. So we prove that it is true for $s = 1 + 2r$. Since $A \geq B > 0$ is assumed, we have

$$A^{-1} \sharp_{\frac{2}{p+1}} B^p \leq B,$$

so that

$$B_1 = (A^{\frac{1}{2}}B^pA^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{p+1}} \leq A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \leq A^2 = A_1.$$

By the assumption, it follows that for $p_1 \geq 1$

$$A_1^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p_1+r}} B_1^p \leq B_1 \leq A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}.$$

Arranging this for $p_1 = \frac{p+1}{2}$, we have

$$A^{-2r} \sharp_{\frac{2(1+r)}{p+1+2r}} A^{\frac{1}{2}} B^p A^{\frac{1}{2}} \leq B_1 \leq A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}.$$

Furthermore multiplying $A^{-\frac{1}{2}}$ on both sides, it follows that for $s = 2r + 1$

$$A^{-s} \sharp_{\frac{1+s}{p+s}} B^p \leq B,$$

as desired. \square

2 安藤-日合不等式

安藤-日合 [3] は、きれいな log-majorization 不等式を開発したが、その中心部分は、次の不等式ということになります。そこで、我々はそれを 安藤-日合不等式 (AH) と呼ぶことにしました。

Theorem 2.1 (Ando-Hiai Inequality (AH)). *If $A \sharp_{\alpha} B \leq I$ for $A, B > 0$, then $A^r \sharp_{\alpha} B^r \leq I$ for $r \geq 1$.*

Proof. It suffices to show that $A^r \sharp_{\alpha} B^r \leq I$ for $1 \leq r \leq 2$. Put $p = r - 1 \in [0, 1]$ and $C = A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$. Then, since the assumption $A \sharp_{\alpha} B \leq I$ is equivalent to $C^{\alpha} \leq A^{-1}$ and so $C^{-\alpha} \geq A$, it follows from Lemma 1.2 that

$$\begin{aligned} A^{-\frac{1}{2}} B^r A^{-\frac{1}{2}} &= A^{-\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} C A^{\frac{1}{2}})^r A^{-\frac{1}{2}} = C^{\frac{1}{2}} (C^{\frac{1}{2}} A C^{\frac{1}{2}})^p A^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq C^{\frac{1}{2}} (C^{\frac{1}{2}} C^{-\alpha} C^{\frac{1}{2}})^p C^{\frac{1}{2}} = C^{1+(1-\alpha)p}. \end{aligned}$$

Hence we have

$$\begin{aligned} A^r \sharp_{\alpha} B^r &= A^{\frac{1}{2}} (A^p \sharp_{\alpha} A^{-\frac{1}{2}} B^r A^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \leq A^{\frac{1}{2}} (C^{-\alpha p} \sharp_{\alpha} C^{1+(1-\alpha)p}) A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} C^{(1+p)\alpha - \alpha p} A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} C^{\alpha} A^{\frac{1}{2}} \leq A^{\frac{1}{2}} A^{-1} A^{\frac{1}{2}} = I. \end{aligned}$$

\square

我々は、古田不等式の変数を増やすというアイデアを借りて、安藤-日合不等式の 2 変数化を図りました, [11] and [12]:

Theorem 2.2 (Generalized Ando-Hiai inequality (GAH)). *For $A, B > 0$ and $\alpha \in [0, 1]$, if $A \sharp_{\alpha} B \leq I$, then*

$$A^r \sharp_{\frac{\alpha r}{\alpha r + (1-\alpha)s}} B^s \leq I \quad \text{for } r, s \geq 1.$$

すぐに分かることですが、 $r = s$ の場合が、きっちり 安藤-日合不等式になっています。ここで、その 2 つある片側版を考えてみます。

Proposition 2.3. *For $A, B > 0$ and $\alpha \in [0, 1]$, if $A \sharp_{\alpha} B \leq I$, then*

$$A^r \sharp_{\frac{\alpha r}{\alpha r + 1 - \alpha}} B \leq I \quad \text{for } r \geq 1.$$

Proposition 2.4. For $A, B > 0$ and $\alpha \in [0, 1]$, if $A \sharp_{\alpha} B \leq I$, then

$$A \sharp_{\frac{\alpha}{\alpha+(1-\alpha)s}} B^s \leq I \quad \text{for } s \geq 1.$$

そしてそれらの間の相互関係を調べてみます。すると次のことがわかります。

Theorem 2.5. (1) Propositions 2.3 and 2.4 are equivalent.

(2) Theorem 2.2 follows from Propositions 2.3 and 2.4

Proof. (1) We first note the transposition formula $X \sharp_{\alpha} Y = Y \sharp_{\beta} X$ for $\beta = 1 - \alpha$. Therefore Proposition 2.3 (for β) is rephrased as follows:

$$B \sharp_{\beta} A \leq I \quad \Rightarrow \quad B^s \sharp_{\frac{\beta s}{\beta s + \alpha}} A \leq I \quad \text{for } s \geq 1.$$

Using the transposition formula again, it coincides with Proposition 2.4 because

$$1 - \frac{\beta s}{\beta s + \alpha} = \frac{\alpha}{\beta s + \alpha} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)s + \alpha}.$$

(2) Suppose that $A \sharp_{\alpha} B \leq I$ and $r, s \geq 1$ are given. Then it follows from Proposition 2.3 that $A^r \sharp_{\alpha_1} B \leq I$ for $\alpha_1 = \frac{\alpha r}{\alpha r + 1 - \alpha}$. We next apply Proposition 2.4 to it, so that we have

$$1 \geq A^r \sharp_{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + (1 - \alpha_1)s}} B^s = A^r \sharp_{\frac{\alpha r}{\alpha r + (1 - \alpha)s}} B^s,$$

as desired. \square

さらに、Proposition 2.3 は、古田不等式の安藤-日合型の同値表現になっていることが知られます。

Theorem 2.6. Proposition 2.3 is equivalent to the Furuta inequality.

Proof. For a given $p \geq 1$, we put $\alpha = \frac{1}{p}$. Then $A \geq B (\geq 0)$ if and only if

$$A^{-1} \sharp_{\alpha} B_1 \leq 1, \quad \text{for } B_1 = A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

If $A \geq B > 0$, then (2.1) holds for $A, B > 0$, so that Proposition 2.3 implies that for any $r \geq 0$

$$1 \geq A^{-(r+1)} \sharp_{\frac{\frac{r+1}{p}}{(1-\frac{1}{p})+\frac{r+1}{p}}} B_1 = A^{-(r+1)} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B_1 = A^{-(r+1)} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} A^{-\frac{1}{2}} B^p A^{-\frac{1}{2}}.$$

Hence we have (FI);

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B^p \leq A.$$

Conversely suppose that (FI) is assumed. If $A^{-1} \sharp_{\alpha} B_1 \leq 1$, then $A \geq (A^{\frac{1}{2}} B_1 A^{\frac{1}{2}})^{\alpha} = B$, where $p = \frac{1}{\alpha}$. So (FI) implies that for $r_1 = r - 1 \geq 0$

$$A \geq A^{-r_1} \sharp_{\frac{1+r_1}{p+r_1}} B^p = A^{-(r-1)} \sharp_{\frac{r}{p+r-1}} A^{\frac{1}{2}} B_1 A^{\frac{1}{2}}.$$

Since $\frac{r}{p+r-1} = \frac{\alpha r}{1+\alpha r - \alpha}$, we have Proposition 2.3. \square

上記の議論で明らかになったことは、Proposition 2.3 を示せば、Theorem 2.2 は、自動的に証明されたことになる、ということでした。そこで、次にその証明を与えたいと思います。なお、Proposition 2.3 は古田不等式と同値なので、その証明は、同時に古田不等式の証明でもあるわけです。これは、通常の帰納法で示されることになりませんが、技術的な面から言えば、 \sharp のインデックス $\frac{\alpha r}{(1-\alpha)+\alpha r}$ の乗法性がポイントです。

Proof of Proposition 2.3. For convenience, we show that if $A^{-1} \sharp_{\alpha} B \leq I$, then

$$A^{-r} \sharp_{\frac{\alpha r}{(1-\alpha)+\alpha r}} B \leq I \quad \text{for } r \geq 1. \quad (4)$$

Now the assumption says that

$$C^{\alpha} = (A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^{\alpha} \leq A.$$

For any $\epsilon \in (0, 1]$, we have $C^{\alpha\epsilon} \leq A^{\epsilon}$ by the Löwner-Heinz inequality and so

$$\begin{aligned} A^{-(1+\epsilon)} \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{(1-\alpha)+\alpha(1+\epsilon)}} B &= A^{-\frac{1}{2}} (A^{-\epsilon} \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{1+\alpha\epsilon}} A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}) A^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq A^{-\frac{1}{2}} (C^{-\alpha\epsilon} \sharp_{\frac{\alpha(1+\epsilon)}{1+\alpha\epsilon}} C) A^{-\frac{1}{2}} = A^{-\frac{1}{2}} C^{\alpha} A^{-\frac{1}{2}} = A^{-1} \sharp_{\alpha} B \leq I. \end{aligned}$$

Hence we proved the conclusion (2.2) for $1 \leq r \leq 2$. So we next assume that (2.2) holds for $1 \leq r \leq 2^n$. Then the discussion of the first half ensures that

$$(A^{-r})^{r_1} \sharp_{\frac{\alpha_1 r_1}{(1-\alpha_1)+\alpha_1 r_1}} B \leq I \quad \text{for } 1 \leq r_1 \leq 2, \text{ where } \alpha_1 = \frac{\alpha r}{(1-\alpha) + \alpha r}.$$

Thus the multiplicative property of the index

$$\frac{\alpha_1 r_1}{(1-\alpha_1) + \alpha_1 r_1} = \frac{\alpha r r_1}{(1-\alpha) + \alpha r r_1}$$

shows that (2.2) holds for all $r \geq 1$. □

この節を閉じるにあたり、(SF) ; satellite of (FI) に対する (AH)-型表現を提示しておきます： $A^{-1} \sharp_{\alpha} B \leq I$ を仮定した上で、 $\alpha = \frac{1}{p}$ とおけば、この仮定は、 $C = (A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{p}} \leq A$ と見なせます。そのとき、(SF) は、

$$A^{-r} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} C^p \leq C, \quad \text{すなわち} \quad A^{-(r+1)} \sharp_{\frac{1+r}{p+r}} B \leq A^{-\frac{1}{2}} C A^{-\frac{1}{2}} = A^{-1} \sharp_{\frac{1}{p}} B$$

が成立すると主張しています。まとめると、(SF) の (AH)-型表現は次のようになることがわかります：

Theorem 2.7. *Let A and B be positive invertible operators. Then*

$$A \sharp_{\alpha} B \leq I \Rightarrow A^r \sharp_{\frac{\alpha r}{\alpha r + 1 - \alpha}} B \leq A \sharp_{\alpha} B (\leq I) \quad \text{for } r \geq 1.$$

3 Grand Furuta Inequality

この節では、(AH) と (FI) をつなげて議論したいと思います。そこで、(AH) を古田型の作用素不等式に変換します。(AH) の証明のように、(AH) の仮定は、

$$B_1 = C^\alpha = (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha \leq A^{-1} = A_1.$$

のようになりますが、さらに $p = \alpha^{-1}$ とおく事により、(AH) は

$$A \geq B > 0 \implies A^r \geq (A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}})^rA^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{p}} \quad r \geq 1, p \geq 1 \quad (\dagger)$$

という形になります。

(AH) をこの形にして、(FI) と比較してみると、 $A^{-\frac{1}{2}}$ in (\dagger) を $A^{-\frac{t}{2}}$ ($t \in [0, 1]$) の $T = 1$ の場合だと解釈できます。最終的に、古田自身により、所謂 Grand Furuta inequality (GFI) の誕生をみました。cf. [17], [18], [10], [13], [26], [28].

Theorem 3.1 (Grand Furuta inequality (GFI)). *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0, 1]$, then*

$$[A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} \leq A^{1-t+r}$$

holds for $r \geq t$ and $p, s \geq 1$.

(GFI) と (AH), (FI) との関係はほとんど明らかだと思いますが、以下のようになっています。

$$(GFI) \text{ for } t = 1, r = s \iff (AH)$$

$$(GFI) \text{ for } t = 0, (s = 1) \iff (FI).$$

次に、(GFI) の $t = 1$ の場合について、(AH), (FI) との関係を調べてみます。まず、(AH) は (GFI; $t = 1, r = s$) にきっちり対応しているので問題ではありません、一方、(FI) の方ですが、実際にきっちりと (GFI) に埋め込まれてしまいます：

Theorem 3.2. *Furuta inequality (FI) is equivalent to (GFI) for $t = s = 1$.*

Proof. We write down (GFI; $t = 1$) for $s = 1$: If $A \geq B > 0$, then

$$[A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{r}{2}}]_{p-1+r}^{\frac{r}{2}} \leq A^r$$

for $p, r \geq 1$, or equivalently,

$$A^{-(r-1)} \#_{\frac{r}{p-1+r}} B^p \leq A$$

for $p, r \geq 1$. Replacing $r - 1$ by r_1 , (GFI; $t = 1$) for $s = 1$ is rephrased as follows: If $A \geq B > 0$, then

$$A^{-r_1} \#_{\frac{1+r_1}{p+r_1}} B^p \leq A$$

for $p \geq 1$ and $r_1 \geq 0$, which is nothing but Furuta inequality. \square

そして、最終的に Theorem 2.2 つまり (GAH) は、(GFI; $t = 1$) と一致することがわかります：

Theorem 3.3. *(GFI; $t = 1$) is equivalent to Theorem 2.2 (GAH).*

Proof. (GFI; $t = 1$) is written as

$$A \geq B > 0 \Rightarrow [A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]_{\overline{(p-1)s+r}} \leq A^r \quad (p, r, s \geq 1).$$

We here put

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad B_1 = A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}}.$$

Then we have

$$A \geq B > 0 \iff A^{-1} \#_{\frac{1}{p}} A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}} \leq 1 \iff A^{-1} \#_{\alpha} B_1 \leq 1$$

and for each $p, r, s \geq 1$

$$\begin{aligned} & [A^{\frac{r}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}})^sA^{\frac{r}{2}}]_{\overline{(p-1)s+r}} \leq A^r \\ \iff & A^{-r} \#_{\frac{r}{(p-1)s+r}} (A^{-\frac{1}{2}}B^pA^{-\frac{1}{2}})^s \leq 1 \\ \iff & A^{-r} \#_{\frac{\alpha r}{\alpha r + (1-\alpha)s}} B_1^s \leq 1. \end{aligned}$$

This shows the statement of Theorem 2.2 (GAH). □

(FI) の場合と同様に, (GFI) についても作用素平均を用いた定式化が可能です。そのために, 便宜的に 2 項演算 \natural_s を導入します。

$$A \natural_s B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^sA^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } s \notin [0, 1],$$

形式的には全く $\#_s$ と変わりませんが, 添字が $[0, 1]$ に入っているかどうかで区別しています。

Grand Furuta inequality (GFI).

$$A \geq B > 0, t \in [0, 1] \Rightarrow A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq A \quad (r \geq t; p, s \geq 1)$$

この (GFI) の定式化は, (FI) のときと同様に, 次の改良を誘発します。

Satellite of Grand Furuta inequality (SGF).

$$A \geq B > 0, t \in [0, 1] \Rightarrow A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \leq B \quad (r \geq t; p, s \geq 1)$$

ここで, (GFI) 及び (SGF) に関わって, 基本的な補題を述べておきたいと思います。

Lemma 3.4. *If $A \geq B > 0$, $t \in [0, 1]$ and $1 \leq s \leq 2$, then*

$$A^t \natural_s C \leq B^t \natural_s C$$

holds for arbitrary $C > 0$, in particular,

$$A^t \natural_s B^p \leq B^{(p-t)s+t}$$

holds for $p \geq 1$.

Proof. Since $A^{-t} \leq B^{-t}$ by (LH), we have

$$A^t \natural_s C = C(C^{-1} \#_{s-1} A^{-t})C \leq C(C^{-1} \#_{s-1} B^{-t})C = B^t \natural_s C.$$

For the latter, we put $C = B^p$ in above. Then we have

$$A^t \natural_s B^p \leq B^t \natural_s B^p = B^{(p-t)s+t}.$$

□

上の補題の最初の不等式は, (LH) と同値であることがわかります。まず, 補題の不等式が成り立っているとして, $A \geq B > 0$, $t \in [0, 1]$ とすれば,

$$A^t \natural_s C \leq B^t \natural_s C$$

に $C = B^t$, $s = 2$ を入れると

$$A^t \natural_2 B^t \leq B^t \natural_2 B^t = B^t,$$

すなわち $B^t A^{-t} B^t \leq B^t$, つまり $A^t \geq B^t$ が得られますが, これは (LH) そのものです。

さて, s の範囲を広げると次のような形の不等式が得られます:

Lemma 3.5. *If $A \geq B > 0$ and $t \in [0, 1]$, then*

$$(A^t \natural_s B^p)^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \leq B \leq A$$

holds for $p, s \geq 1$.

Proof. We fix $p \geq 1$ and $t \in [0, 1]$. It follows from Lemma 3.5 and (LH) that

$$(\dagger) \quad A \geq B > 0 \Rightarrow B_1 = (A^t \natural_s B^p)^{\frac{1}{(p-t)s+t}} \leq B \leq A$$

for $s \in [1, 2]$. So we assume that (\dagger) holds for some $s \geq 1$, and prove that

$$B_2 = (A^t \natural_{2s} B^p)^{\frac{1}{2(p-t)s+t}} \leq B_1 \leq B.$$

Actually we apply (\dagger) to $B_1 \leq A$. Then we have

$$(A^t \natural_2 B_1^{p_1})^{\frac{1}{2(p_1-t)+t}} \leq B_1 \leq B, \text{ where } p_1 = (p-t)s + t,$$

and moreover

$$(A^t \natural_2 B_1^{p_1})^{\frac{1}{2(p_1-t)+t}} = [A^t \natural_2 (A^t \natural_s B^p)]^{\frac{1}{(p-t)2s+t}} = (A^t \natural_{2s} B^p)^{\frac{1}{(p-t)2s+t}} = B_2,$$

which completes the proof. □

これだけの準備をすれば, (SF) を使うことによって, (SGF) を示すことができます。

Proof of (SGF). For given p, t, s , we use the same notation as above; $p_1 = (p - t)s + t$ and $B_1 = (A^t \natural_s B^p)^{\frac{1}{p_1}}$. Then Lemma 3.6 implies that $B_1 \leq B \leq A$. Hence it follows from (SF) for $B_1 \leq A$ and $r_1 = r - t$ that

$$A^{-r+t} \#_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) = A^{r_1} \#_{\frac{1+r_1}{p_1+r_1}} B_1^{p_1} \leq B_1 \leq B.$$

□

作用素不等式の族 (SGF; $t \in [0, 1]$) については, 次のような遺伝的性質を有しています。

Theorem 3.6. (SGF; $t = 1$) implies (SGF; t) for $t \in [0, 1]$.

そして, (GFI) 自身もこの性質を有しています。

Theorem 3.7. (GFI; $t = 1$) implies (GFI; t) for $t \in [0, 1]$.

この結果の持つ意味は, (AH) から (GFI) に至るアプローチは少なくとも一定の有効性を持っており, 作用素平均を用いることによって, そのルートは割合平坦なものにできるというようなことであると考えています。

参考文献

- [1] T.Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture notes (mimeographed), Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.
- [2] T.Ando, *On some operator inequality*, Math. Ann., **279** (1987), 157–159.
- [3] T.Ando and F.Hiai, *Log-majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algebra Appl., **197,198** (1994), 113–131
- [4] N.N.Chan and M.K.Kwong, *Hermitian matrix inequalities and a conjecture*, Amer. Math. Monthly, **92** (1985), 533–541.
- [5] M.Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator Theory, **23** (1990), 67–72.
- [6] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Algebra Appl., **179** (1993), 161–169.
- [7] M.Fujii, M.Hashimoto, Y.Seo and M.Yanagida, *Characterizations of usual and chaotic order via Furuta and Kantorovich inequalities*, Sci. Math., **3** (2000), 405–418.
- [8] M.Fujii, J.-F.Jiang and E.Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3655–3658.
- [9] M.Fujii, J.-F.Jiang, E.Kamei and K.Tanahashi, *A characterization of chaotic order and a problem*, J.Inequal. Appl., **2** (1998), 149–156.
- [10] M.Fujii and E.Kamei, *Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 2751–2756.

- [11] M.Fujii and E.Kamei, *Ando-Hiai inequality and Furuta inequality*, Linear Algebra Appl., **416** (2006), 541–545.
- [12] M.Fujii and E.Kamei, *Variants of Ando-Hiai inequality*, Operator Theory: Adv. Appl., **187** (2008), 169–174.
- [13] M.Fujii, A.Matsumoto and R.Nakamoto, *A short proof of the best possibility for the grand Furuta inequality*, J. Inequal. Appl., **4** (1999), 339–344.
- [14] T.Furuta, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1 + 2r)q \geq p + 2r$* , Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 85–88.
- [15] T.Furuta, *Elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad., **65** (1989), 126.
- [16] T.Furuta, *Applications of order preserving operator inequalities*, Operator Theory: Advances and Applications, **59** (1992), 180–190.
- [17] T.Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., **219** (1995), 139–155.
- [18] T.Furuta, *Simplified proof of an order preserving operator inequality*, Proc. Japan. Acad., **74** (1998), 114.
- [19] T.Furuta, *Invitation to linear operators*, Taylor&Francis, London, 2001.
- [20] E.Heinz, *Beitrage zur Störungstheorie der Spectralziehung*, Math. Ann., **123** (1951), 415–438.
- [21] E.Kamei, *A satellite to Furuta’s inequality*, Math. Japon., **33** (1988), 883–886.
- [22] F.Kubo and T.Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1980), 205–224.
- [23] K.Löwner, *Über monotone Matrix function*, Math. Z., **38** (1934), 177–216.
- [24] G.K.Pedersen, *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 309–310.
- [25] K. Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 141–146.
- [26] K.Tanahashi, *The best possibility of the grand Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **128** (2000), 511–519.
- [27] M.Uchiyama, *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 469–471.
- [28] T.Yamazaki, *Simplified proof of Tanahashi’s result on the best possibility of generalized Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 473–477.
- [29] M.Yanagida, *Some applications of Tanahashi’s result on the best possibility of Furuta inequality*, Math. Inequal. Appl., **2** (1999), 297–305.

* 正会員申込用紙

正会員入会申込書

氏名			英語名		
次の2つのうち会報等を送付先とする方に を付けてお書き下さい。					
所属先 住所	〒				
住所	〒				
専門分野	表 f*より選んで○で囲って下さい f-1, f-2, f-3, f-4, f-5, f-6, f-7, f-8, f-9, f-10, f-11, f-12, f-13, f-14				
E-mail address			電話番号		
			Fax 番号		
会員区分 該当部分にチェ ック	<input type="checkbox"/> A1 一般1年 <input type="checkbox"/> A3 一般3年 <input type="checkbox"/> S-A1 高齢者又は学生1年 <input type="checkbox"/> S-A3 高齢者又は学生3年 <input type="checkbox"/> 生涯会員				
所属先の 施設	<input type="checkbox"/> ビデオ会議可能 <input type="checkbox"/> 遠隔会議可能 <input type="checkbox"/> コンピューターセンター				
所属先の 通信システム	<input type="checkbox"/> ISDN <input type="checkbox"/> IP				
所属大学等が 機関会員	<input type="checkbox"/> 会員である <input type="checkbox"/> 会員でない				
SCMJのプリント版の購入					
<input type="checkbox"/> 希望 1年会員 3,000円、3年会員 8,000円**〔前払い〕			<input type="checkbox"/> 希望しない		
高齢会員を申し 込む場合	生年月日		学生会員の場合は在学証を添付		
日付					
私は ISMS 会員になり、国際数理科学協会に送り状に記載された年会費を払います。ISMS 会員として受け取った Scientiae Mathematicae Japonicae のコピーは個人使用とし、機関、大学または図書館やその他の組織の中に置かず、閲覧目的で会員購読することもしません。			署名		

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。**ただし、3年間一括の場合は8,000円です。この申込みの内容は会との連絡以外には使用いたしません。

Application form for an individual member of ISMS

Family Name		First & Middle Name												
Check one of the following addresses to which "Notices from the ISMS" should be sent.														
Address of your institution (university)	<input type="checkbox"/>													
Home address	<input type="checkbox"/>													
Special fields*	f-1	f-2	f-3	f-4	f-5	f-6	f-7	f-8	f-9	f-10	f-11	f-12	f-13	f-14
E-mail address			Tel.											
			Fax											
Membership category** (Circle one)	A1, A3, SA1, SA3, F1, F3, SF1, SF3, D1, D3, SD1, SD3, AL, FL, DL													
Check the facilities your institution has.	Conference room(s) for video conference Computer center													
Communication system of your institution	<input type="checkbox"/> ISDN <input type="checkbox"/> IP													
Is your institution (university) an Institutional Member of ISMS?	<input type="checkbox"/> Yes <input type="checkbox"/> No													
I subscribe to the printed version of SCMJ.	<input type="checkbox"/> ¥3,000 (US\$37, €27) per year for those members of A1, SA1, F1, and SF1, D1 and SD1. <input type="checkbox"/> ¥2,700 (US\$34, €25) per year for those members of A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, and DL. <input type="checkbox"/> In case A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, or DL members make the payment at a time in advance, the price for 3 years is ¥8,000 (US\$100, €73).													
For the aged member, write your birth year.							For the student member, student registration certificate should be attached.							
Date of Application														
I wish to enroll as a member of ISMS and will pay to International Society for Mathematical Sciences the annual dues upon presentation of an invoice. Copies of <i>Scientiae Mathematicae Japonicae</i> received as an ISMS member will be for my personal use only and shall not be placed in institutional, university or other libraries or organizations, nor can membership subscriptions be used for library purposes.														
Signature														

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。

**Notices from the ISMS March 2008 p.28 を御参照下さい。

ISMS (JAMS の継続) 会員募集

ISMS の出版物: ISMS は、創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得ている Mathematica Japonica (M.J.) と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ、Scientiae Mathematicae (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、“21 世紀 MJ/SCM New Series, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ)” として、電子版は 2000 年 9 月より発行してきました。印刷版は、1978 年 1 月より、年間 6 冊、700 ~ 1200 頁を出版していましたが、最近の諸般の事情により本年からは年 3 回発行となりました。なお、全体として 260 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の 1) ~ 7) です。

- 1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外 15 カ国の著名な研究者 40 名が参加している。
- 2) 世界の research group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
- 3) Editor を窓口として直接論文を投稿できて、迅速な referee 及び出版が得られる。
- 4) 有名な数理科学者の original paper や、研究に役立つ survey が、毎号載せられている。
- 5) SCMJ は、世界の有名数理科学者による、極めて興味ある expository paper を、毎号 International Plaza 欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
- 6) 投稿論文は、accept 後 (又は組版後) 待ち時間 0 で発行されます。
- 7) 別刷作成について、ページ数に無関係に一編について ¥100 (US\$ 1) でお分けいたします。
- 8) Mathematical Reviews, Zentralblatt に from cover to cover で review されている。

ISMS の研究集会: (1) 研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究集会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2) ISMS には内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高い level の研究会が online で行われる事を期待している。(本誌 45 号 3p 及び Notices March 2006 9p を御参照下さい)

ISMS の学術賞: 会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS 賞、JAMS 賞、Shimizu 賞、Kunugui 賞、Kitagawa 賞を設けている。(詳しくは本誌 45 号 2p 会則 13 条を御参照下さい)

< ISMS の会員の特典 > 1 . SCMJ 電子版の購読 (print out も含む) 無料。 2 . SCMJ print 版の少額での購読 (下表 1) 。 < 機関購読会員の特典 > 1 . 機関内の 2 名の方を準会員として会費無料でほぼ会員と同じ権利を持つものとして登録することが出来る。

	正会員 (1 年)	正会員 (3 年)	機関会員	定価
表 1 【雑誌購読費】	Print	¥3,000 US\$ 37, €27	¥ 2,700* US\$ 34, €25	¥ 18,000 US\$225, €164
	Online	Free	Free	
	Online+print	¥3,000 US\$37, €27	¥ 2,700 US\$34, €25	¥ 18,000 US\$225, €164

* 3 年会員のみ、雑誌購読費 3 年分前払いの場合は ¥8,000 (US\$ 100, €73) になります。
著者の方には、SCMJ を 1 冊送料込みで 1,000 円または US \$ 12 で購入できます。

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥6,000	US\$ 75, €55	US\$ 45, €33
3 年 A 会員	¥16,000	US\$ 200, €147	US\$ 120, €88
単年度 S 会員	¥4,000	US\$ 50, €37	US\$ 30, €22
3 年 S 会員	¥10,000	US\$125, €92	US\$ 74, €54
生涯会員**	¥60,000	US\$ 750, €550	US\$ 440, €323

**過去 10 年以上、正会員であった方に限る。

A 会員は正会員を指し、S 会員は、学生会員と高齢会員(70 歳以上)を指します。

国際数理科学協会
International Society for Mathematical Sciences

〒590-0075 堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内
Tel: (072)222-1850 / Fax: (072)222-7987 URL: <http://www.jams.or.jp>