一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.73/ 2011.1

編集委員： 藤井正俊 (委員長)、藤井淳一

目次

＊ 代議員選挙結果

定款の附則５に基づいて、定数３０名以内の代議員の選挙を行ないました。国内会員 147 名に往復はがきを出し、34 名の方の投票が得られました。設立時社員 4 名全員の立会いで開票の結果 28 名の方を当選と定めました。会員番号順での氏名は次の方々です。ご苦労様ですが、よろしくお願いいたします。

中西シヅ、石井博昭、松本和夫、井関清志、鷺原雅子、服部泰直、長尾壽夫、寺岡義伸、地道正行、
佐藤優子、北原和明、曽布川拓也、藤井正俊、八杉満利子、熊谷悦生、福井和彦、植松康祐、
安芸重雄、高橋渉、中井英一、北広男、鈴木武、井垣伸子、藤井淳一、田畑吉雄、和多田淳三、
棚橋浩太郎、玉置健一郎、

任期は 2011 年 3 月 1 日から 2 年間です。

設立時社員：長尾　壽夫、寺岡　伸義、熊谷　悦生、植松　康祐

＊ 社員総会日程

社員総会を2011年３月 26 日(土) 阪大中ノ島センターで行なう予定です。議題は来年度の予算等です。詳細が決まりましたら、代議員の方にはメールでご連絡いたさいます。出席方お願いします。

設立時会長　　　長尾 壽夫

＊ 賛助会員制度（寄付制度）と基金

2007 年 7 月に賛助会員制度(Contributing Member)が発足しております。その年の 8 月 1 日より下記の二つの基金を発足させ、御寄付頂いた方の御指示に従い、各基金による事業の推進に役立たせたいと考えています。一口１万円より何口でも、また一口未満の御寄付も有難くお受け致します。

右記の郵便振替口座にてお受け致します。　00960-3-206607　国際数理科学協会

なお、基金の使途について下記よりお選び下さい。
(I)ISMS 授賞基金
ISMS 賞、功力賞、北川賞についての授賞メダルの作製、受賞者への送付の費用等授賞に関する費用に支出
(II)国際研究交流基金
海外及び国内の研究集会参加 site の会場費、研究交流設備の使用料の支出
(Ⅲ)Notices(article)、SCMJ(Plaza)等への Invited Authors に対する通信費
(Ⅳ)ISMS 国際研究集会での Keynote Speaker の、出席 site までの交通費
(Ⅴ)使途に指定はしない
猶、御寄付の種類は、御寄付の累計額が
(1)50 万円(又は$5000)以上
(2)10 万円(又は$1000)以上
(3)5 万円(又は$500)以上
(4)1 万円(又は$100)以上
(5)1 万円(又は$100)未満
の 5 種類とし、感謝状を贈呈すると共に御氏名を(匿名希望の方は除き)www.及び会報、Notices 欄に掲載させて頂きます。

＊　2011 年研究集会開催

例年夏に行なっています研究集会を本年は熊谷悦生会員のお世話で阪大基礎工で行ないます。日程等は未定ですが、開催を予定しているグループは準備を始めておいてください。最近は行なうグループが固定しているようですが、奮って開催されますようお願い致します。

＊ 寄稿

直交する場合、そして、その場合にのみ、最大になる値

長田　まりゑ

1　はじめに

ハンケル (Hankel) は、学問の持つ特質に関して、次の様な見解を持っていたと、以前に何かの数学書で読んだことがある。

「ほとんどの学問は、後の世代は前の世代が築いたものを棄て去り、前者が確立したものを後者は亡ぼし

てしまう。数学だけは、どの世代も同じ建物の新しい階を継ぎ足していく。」

ここでは、この言葉を、裏付ける様な事例について、記していきたい。筆者の専門分野である「作用素環論」は、フォン・ノイマン という数学者が創り出した数学の世界であるが、その成り立ちからして、上記ハンケルの言葉に、同意せざるを得ないのではないかと、感じさせせられるところがある。

まず、「作用素環」とは、非常に大雑把な言い方をすれば、「複素数全体の構造を含む抽象的な世界であり、適切な位相のもとでの極限操作に関して閉じた体系を持つ。しかしながら、数の場合と異なって、掛け算に関しては、順序が異なれば異なる結果が生じ得るような対象」であり、更に、「ユークリッド空間の概念が、現代数学的基礎のもとで公理化された空間上に構築された世界である」と看做せる。

その作用素環論の世界に、古代ユークリッド幾何学において重要な役割を果たした「直交関係」に相当する概念が導入されている。ここでは、この「直交」概念をエントロピー理論と結び付けて、筆者が得た次の結果を、ハンケルの言葉の一例として紹介したい：

「ある部分環の対が互いに直交関係にある為の必要十分条件は、この対に関わるエントロピーの値が最大になることである」。

1.1 なぜ、数値にこだわるのか

「数学」に携わる者にとっての根底にある態度の一つとして考えられるものに、次の様なものが、あるのでは、ないだろうか。

1. こちらが、伝えたいことが、何の装飾もされずに、相手に、正確に伝わること。
2. 遠くとも、見えなくとも、言葉が違っても、数学用語と記号が、共通であれば正確に伝わる筈だ。
3. 情報を伝える人間と、受け取る人間の伝え方・受け取り方に依らずに、正確に伝わること。

数学用語と数学記号は、言葉の役割を果たす。そして、「数字」も、 数学では、多くを物語りうる。
よく知られたことではあるが、BC ５００年, ピタゴラスは、「万物は数である」と言い残した。
他者にある事実を伝える数学的にスマートな方法は、数値により説明することであろうか。

ここで紹介する結果は、抽象的な数学の概念を数値で表わすことを可能にした一つの例である：すなわち、「直交関係」は、「エントロピー」をある適用の仕方をすると、その数値が最大値となることで、特徴付けられると。

この小文は、つぎのような構成で纏めている： 第二節では、「作用素環論」誕生の黎明期におけるフォン・ノイマン (von Neumann) をめぐるエピソードを紐解きながら、作用素環の始まりについて記す。第三節では、第四節で必要とする作用素環に関するよく知られている基礎事実を述べる。最後に第四節で、主目的の一対の部分環に対する位置関係の量に関する結果を、話を簡単にするために、行列環に話を絞って、展開する。尚、 ”数学のお話し ”的この文の性格上、参考文献を揚げることは、しなかった。

2　ノイマン が導入した「作用素環論」という世界

「数学」は、専門的な内容に基づいて、細分化されている。筆者が、専門としている分野は、ジョン・フォン・ノイマン（ John von Neumann ）を創設者とする理論で **「作用素環論」** **”Theory of Operator Algebras”** と呼ばれ、「操作の順序を重視する数学」であり, 非可換数学の象徴的存在の位置を占めている。

2.1　ヒルベルト 空間の始まり

作用素環を語るのに、ヒルベルト 空間抜きで、話を展開することは、考えられない。ヒルベルト空間は、いかなるきっかけで、生まれることになったのか。よく知られていることではあるが、ハンケルの言葉を念頭に置きつつ、作用素環論との繋がりとして記していく。

2.1.1　ヒルベルト の目指した公理系数学

ゲッチンゲン (Gettingen) 大学教授 ヒルベルト (Hilbert) は、カントール の集合論を含めた数学をまるごと公理化し、いついかなる時も、「Aならば、B が言えて、それならば、C が言えてと $\cdots$ と断言できる状況にすること」を、1900 年パリでの国際数学者会議において、提唱し, ユークリッド幾何学の体系を、より抽象化・公理化した空間を、導入した。これが、いわゆる Hilbert 空間の始まりとされている。

2.1.2　ヒルベルト そして フォン・ノイマン

フォン・ノイマン (一般には、John von Neumann)（正式では Johann Luding von Neumann ）は、１９０３年１２月２８日に、ハンガリーのブダペストで、生まれた。尚、ハンガリーでは、Neumann Janos (ヤーヌス) である。また、von は, von Neumann が貴族であることを表わしている。

　１９２１年、フォン・ノイマン は ヒルベルト の呼びかけに共鳴し、ヒルベルト 空間論に精力的に取り組むことになる。ヒルベルト が、ユークリッド幾何学の体系を、より抽象化・公理化した空間を定義したのに対して、フォン・ノイマン は 1929 年の論文

$$”Allgemeine\ Eigenuertheorie\ Hermitischen\ Functional\ operator”$$

と、それに続く 29 才 (1932 年) のときの著書

$$”Mathematische\ Grundlagen\ der\ Quantenmechanik”$$

において、抽象的 ヒルベルト 空間という名のもとで、現代数学的な方法で公理的基礎を与えたのである。

　なお、著書 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* は、「量子力学の数学的基礎」とのタイトルのもとで、日本語訳が出ている。

2.2　ゲーデル とフォン・ノイマン

他方、１９３２年、ゲーデル (Gödel) は、不確定性原理を打ち立て、公理系数学・無矛盾生体系数学は、不可能であることを示したわけではあるが、フォン・ノイマン は、ゲーデル の結果は、公理系の終わりではな

く公理化への道と考えるべきだとの立場を貫くことになり、以後の彼の数学の基礎を築くことになる。

ゲッチンゲン大学の教授たちが、ハイゼンベルグの理論を、「量子力学」と名付けた当時

「 ”Hilbert 空間　内のベクトルの幾何学は、量子力学的状態と同じ数学形式を持つ ”という直観を、Jony は、持っていた」

と、後に、フォン・ノイマンの弟子で作用素論の大家であるハルモス (Halmos) は語っている。親しい人達の間では、フォン・ノイマンは、Jony (ジョニー) と呼ばれていた。

2.3　量子力学そして作用素環へ

２０世紀における物理学の最大の発見であり、古典物理学の物質像を根本的に変えたといわれる ”量子力学 ”の分野において、波動力学を確立したシュレーディンガー (Schrodinger) による所謂　”シュレーディンガー方程式 ”の解に関する多くの問題を解決する数学的枠組みを与えたのが、フォン・ノイマンによる「量子力学の公理化」の仕事である。

ベルリン大学・プリンストン大学等で、教鞭をとった後、１９３３年に アメリカに移住したノイマンは、１９３６年以来、マーレイ (Murray) と共同で、”作用素環 ”の理論を、発展させることになった。

ちなみに、マーレイと共同研究することになった契機について、すこし記す：作用素環のうちでも、ノイマンが特に力を注いで研究したある種の作用素環は、フォン・ノイマン環と呼ばれる。フォン・ノイマン環のうちで、最も中心的な役割を果たすものは因子環と呼ばれる（因子環については、後に、もう少し詳しく述べるが、フォン・ノイマン環の集合の中の核の役割を果たすもの）。その因子環の分類の仕事をしているときに、「フォン・ノイマンが、語ったある数学的な見通しに、マーレイが、異を唱えたことが共同研究のきっかけだ」[1]とのこと。

こうして始まった マーレイとフォン・ノイマン による一連の重要な環の理論の研究が、今日の作用素環の理論の土台をなして、その基礎の上に、以後の研究は築かれていっている。

2.4　哲学者サイドから見た von Neumann の功績について

上記 2.1.1, 2,1,2, 2.2 での経過のように、多分に哲学的色彩を帯びた フォン・ノイマン の仕事に対して、アムステル大学哲学科教授ジョン・ ドーリングは、次の様な、評価[2]を フォン・ノイマン に与えている。

「哲学の六分野で von Neumann は抜群の貢献をしました。おぼろげだった問題を数学できちんと処理できる姿にしたわけです。」

その六分野とは

1. 数学の哲学（集合論・数論・ヒルベルト空間ほか）

[1]New York の Hopfstora University で開催された ”The Legacy of John von Neumann” , May 29 - June 4 (1988) の際、Hofstra Univarsity Faculty Club にて、Murray と一緒にコーヒーを飲みながらのおしゃべりより

[2]ノーマン・マクレイ著、渡辺正・芦田みどり訳「フォン・ノイマンの生涯」朝日選書 610 より

2. 物理の哲学（とくに量子論）

3. 経済学の哲学

4. 合理行動の哲学

5. 生物学の哲学

6. コンピューターと 人工知能学の哲学

だそうである。

因みに、「作用素環論」は、上記 1 のヒルベルト空間と、上記 2 の量子論に関わって、発展してきた分野である。

3 ヒルベルト 空間・作用素・作用素環

この節の目的は、次節の下準備として、よく知られている事実について記すことである。

3.1 ヒルベルト空間

複素数の集合を、記号 $\mathbb{C}$ で表わす。 係数体を $\mathbb{C}$ とする線形空間 $\mathcal{H}$ で、**内積**と呼ばれる次の関係を満たす写像 $<\cdot,\cdot>: \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ が与えられているものを内積空間と呼ぶ：

$$< x+y, z > = < x, z > + < y, z >, \quad (x, y, z \in \mathcal{H}) \tag{3.1}$$

$$< \alpha x, y > = \ \alpha < x, y >, \quad (\alpha \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathcal{H}) \tag{3.2}$$

$$\overline{< x, y >} \ = < y, x >, \quad (x, y \in \mathcal{H}) \tag{3.3}$$

$$< x, x > \geq \ 0,\ (x \in \mathcal{H}) \quad \text{更に} \ < x, x >= 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0, \tag{3.4}$$

内積は $< x, y >$ は $\mathcal{H}$ の中での x と y との位置関係を決めるものであり、ユークリッド空間における**直交**に相当する役割は、$< x, y >= 0$ という関係が果たす。また、内積 $<\cdot,\cdot>$ から、各 $x\in\mathcal{H}$ に対して、ユークリッド空間における ベクトルの **長さ**の概念をみたす $\|x\|$ が次の形式で導かれる：

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}. \tag{3.5}$$

内積空間 $\mathcal{H}$ は、$\|x\|$ に関して ”完備 ”と呼ばれる条件を満たす時、ヒルベルト空間と呼ばれる。この条件は、実数・複素数のときの、ある当然な条件を満たす点列の極限が存在することに相当する。

$\mathcal{H}$ が有限次元であれば、必然的に ”完備 ”となり、従ってヒルベルト空間となる。

3.1.1 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の例

最も簡単なヒルベルト空間は、n 次元空間 $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{C}\}$ である。その内積は

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \tag{3.6}$$

で与えられる。ただし、$\overline{y_i}$ は複素数 y_i の共役複素数。

3.2 作用素 と 作用素環

作用素 (Operator) 及び 作用素環 (Operator Algebras) とは、数の世界の概念を ヒルベルト空間の上の写像の世界へ、実現化したものであろう。すなわち、非常に大雑把な言い方をすれば、「ヒルベルト空間の上の写像の世界へ、複素数全体の構造導入したもの。当然 ヒルベルト空間の構造を反映して、各種の位相が入れられている。しかしながら、数の場合と本質的に異なるのは、積の順序に細やかな神経を払わなければならない対象」であり、更に、ユークリッド空間の概念が現代数学的基礎のもとで公理化された空間, ヒルベルト空間上に構築された世界であると言える。

3.2.1 作用素とは

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ から、$\mathcal{H}$ への写像　$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ で、

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathcal{H}) \tag{3.7}$$

を満たす写像 T は $\mathcal{H}$ 上の作用素と呼ばれる。写像 T のベクトルとしての長さに対する概念 $\|T\|$ は次の形式で与えられる：

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \tag{3.8}$$

一般に $\|T\| < \infty$ とは、限らない。$\|T\| < \infty$ となるとき、T は有界作用素と呼ばれる。

有限次元 $\mathcal{H}$ 上の作用素は常に有界作用素となる。恒等写像は、以下 I で表わす（すなわち、$I(x) = x, (x \in \mathcal{H})$).

3.2.2 $B(\mathcal{H})$ とは

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素の全体を、$B(\mathcal{H})$ と記す。$B(\mathcal{H})$ は、次の線型演算と積演算のもとで、環の構造を持つ：

$$(\lambda T + \mu S)(x) = \lambda T(x) + \mu S(x),\ (\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ T, S \in B(\mathcal{H}),\ x \in \mathcal{H}) \tag{3.9}$$

$$(ST)(x) = S(T(x)),\ (T, S \in B(\mathcal{H}),\ x \in \mathcal{H}). \tag{3.10}$$

3.2.3 共役作用素環 T^* とは

更に、$T \in B(\mathcal{H})$ に対しては、次の関係によって決定される $T^* \in B(\mathcal{H})$ が存在する：

$$< T(x), y >=< x, T^*(y) >, \quad (x, y \in \mathcal{H}). \tag{3.11}$$

複素数 λ に対する共役複素数 $\bar{\lambda}$ の役割を果たすものであり、

$$(\lambda T + \mu S)^* = \bar{\lambda} T^* + \bar{\mu} S^*, \quad (ST)^* = T^* S^*, \quad (T^*)^* = T \tag{3.12}$$

の関係が満たされている。複素数 λ のときの $|\lambda|^2 = \bar{\lambda}\lambda$ に相当するのは次の関係式である：

$$\|T\|^2 = \|T^* T\| \tag{3.13}$$

次節の作用素環の議論において、以下の三種類の作用素は、基本的な役割を果たす：

1. $T = T^*$ を満たす作用素 T は実数に相当する役割を果たし、**自己共役作用素**と、呼ばれる。

2. 更に、正の実数の役割を果たすのは、$< T(x), x > \geq 0$ を全ての $x \in \mathcal{H}$ に対して満たすもので、**正作用素**と呼ばれ、簡単に $T \geq 0$ と記す。必然的に、$T \geq 0$ ならば、$T = T^*$ である。$T \geq 0$ であることとある S が存在して $T = S^* S$ と書けることとは、同値である。

3. 三番目の作用素は、絶対値が 1 の複素数の役割を果たす **ユニタリー作用素** $U \in B(\mathcal{H})$ で、関係

   $$UU^* = U^* U = 1 \tag{3.14}$$

   で、決定される。

3.2.4 作用素環とは, 線形汎関数とは

作用素環 $B(\mathcal{H})$ に対しては、各種（都合七つ）の位相が導入されている。上記の演算、位相との関わりのもとで、数学的に妥当な性質を満たす $B(\mathcal{H})$ の部分集合を、総称して作用素環と呼んでいる。

作用素環 $\mathcal{M}$ の議論をするために、欠かすことのできないものとして、次の性質を満たす $\mathcal{M}$ 上の **線形汎関数** τ と呼ばれるものがある:

$$\tau(\lambda S + \mu T) = \lambda \tau(S) + \mu \tau(T). \tag{3.15}$$

その中で、基本的な役割を果たすのは**忠実な正線形汎関数**と呼ばれるもので、次の条件を満たす線形汎関数である：

$$\tau(T^* T) \geq 0 \quad \text{更に} \quad \tau(T^* T) = 0 \ \Leftrightarrow \ T = 0, \tag{3.16}$$

3.2.5 作用素としての行列

$n \times n$ 行列は、ヒルベルト空間 $\mathbb{C}^n$ 上の作用素であり、最も簡単な例である。一般に、n 次元ヒルベルト空間上の作用素は、恒に $n \times n$ 行列として、表示することが出来る。

行列 T の各 (i,j) 成分を、$T(i,j) \in \mathbb{C}$ と記すと、T^* は、T の転置行列で、しかも、その成分は、共役複素数をとったもの、すなわち、$T^*(i,j) = \overline{T(j,i)}$ である。又、行列 T の大きさの概念であるところの $\|T\|$ は T^*T の最大固有値の平方根にあたる。

3.2.6 作用素環としての $n \times n$ 行列の集合 $M_n(\mathbb{C})$

作用素環の例として、最初に浮上するのは、$n \times n$ 複素行列の集合 $M_n(\mathbb{C})$ であり、$B(\mathbb{C}^n)$ と同一視される。線型演算と積は、行列に対する通常のそれであり、作用素環に対して導入されている全ての位相に関して閉じている。

作用素環 $M_n(\mathbb{C})$ 上の典型的な正線形汎関数は、通常のトレースである。以下 $\mathrm{Tr_n}$ で記す。すなわち

$$\mathrm{Tr_n}(T) = \sum_{i=1}^{n} T(i,i), \quad (T \in M_n(\mathbb{C})) \tag{3.17}$$

である。線形汎関数 $\mathrm{Tr_n}$ が持つ次式の性質、所謂 ”trace property” は、作用素環の理論において、重要な役割を果たす：

$$\mathrm{Tr_n}(ST) = \mathrm{Tr_n}(TS), \quad (T,S \in M_n(\mathbb{C}). \tag{3.18}$$

3.2.7 作用素の スペクトル

種々の関数の研究において、関数 f を調べるために、 f の値の集合を知ることは、基本的な作業である。作用素 T の場合、関数 f の値に相当するのは、 T の **スペクトル** と呼ばれる数である。上に述べた三種の作用素は、次のような形でで決定づけられる：

$$T = T^* \Longleftrightarrow \text{ 全てのスペクトル が実数}$$

$$T \geq 0 \Longleftrightarrow \text{全てのスペクトル が が正の実数}$$

$$T\text{ がユニタリー} \Longleftrightarrow \text{全てのスペクトルの絶対値が } 1$$

行列 T の時には T の スペクトルは T の固有値である。

作用素 $T \in B(\mathcal{H})$ の逆作用素 (inverse) とは、 $TS = ST = I$ を満たす作用素 $S \in B(\mathcal{H})$ のことで、T^{-1} と記される。複素数 λ が、作用素 T のスペクトルであることは、作用素 $(\lambda I - T)$ の逆作用素が「存在しない」ことで、決定される。

3.2.8 作用素の スペクトル をめぐるエピソード

3.2.8 - 1 (犬の名前が inverse ?) 作用素 T のスペクトルを求めるためには、逆作用素が大きな働きをする。すなわち、 $(\lambda I - T)$ の逆作用素 (inverse) が「存在するか」「存在しないか」が、問題なのである。

von Neumann が、このことを如何に重視していたか？　一つの興味深い証拠ともいうべきものがある。一匹の犬と一緒に移った von Neumann 夫妻の写真である。写真の下に記されている、その愛犬の名前は、"inverse"。

3.2.8 - 2 (海岸線の図形) 作用素の スペクトル研究を土台として生み出されたのが、フラクタル幾何である。フラクタル幾何に関する理論は、ブノワ・マンデルブロー（Benoit Mandelbrot）によって創作された。マンデルブロー集合として有名な彼は、海岸線やひび割れの形、樹木の枝分かれなどに見られる複雑な図形を数学的に理論化したのだが、その研究の引き金を引いたのは、「作用素のスペクトルの研究であった」[3]。もう少し詳しく言えば、彼の研究の切っ掛けは、「von Neumann の傍で、各種の作用素のスペクトルムを調べる作業をしていたとき、作用素のスペクトルムの集合の図示に真剣に取り組んでいたことにある」。

4 内積空間 $M_n(\mathbb{C})$

ここでは、話を簡単にするために、ヒルベルト空間は全て有限次元と仮定する。結果として、作用素環は、ある自然数 n に対する行列環 $M_n(\mathbb{C})$ として構わないことになる。

4.1 作用素環に内積を入れる

$M_n(\mathbb{C})$ の次の様な正規化されたトレース τ を考える：

$$\tau(T) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr_n(T)} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{T(i,i)}, \quad (\mathrm{T} = [\mathrm{T(i,j)}]_{\{\mathrm{i,j}\}} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{C})). \tag{4.1}$$

勿論 τ は、条件 (3.15) (3.16) を満たす。従って忠実で正の線形汎関数である。

この τ を用いて、$M_n(\mathbb{C})$ に内積を定義することが出来る：

$$< S, T >= \tau(T^* S), \quad S, T \in M_n(\mathbb{C}) \tag{4.2}$$

と置くと $< S, T >$ は、関係式 (3,1) - (3.4) を満たし、内積となる。又、$M_n(\mathbb{C})$ は、有限次元であるから、この内積のもとで勿論 ヒルベルト空間でもある。

正規化されたトレース τ のおかげで、単位行列 I の長さ $\|I\|$ は、1 となる。

4.2 因子環と極大可換部分環

作用素環の部分集合 $\mathcal{A}$ は次の条件を満たす時 ***-部分環**と呼ばれる：

$$S, T \in \mathcal{A} \Longrightarrow S^* \in \mathcal{A},\ ST \in \mathcal{A},\ \lambda S + \mu T \in \mathcal{A},\ (\lambda, \mu \in \mathbb{C}) \tag{4.3}$$

[3] 2003 年　ブダペストにおける、"Von Neumann Centennial Conference" におけるマンデルブローの講演より

以下、 $M_n(\mathbb{C})$ の単位元 I (すなわち、単位行列）を含む *-部分環のみを対象として、話をすすめる。

最も特徴的な *-部分環は、極大可換部分環 (Maximal abelian subalgebra) と部分因子環 (Subfactor) である。

1. 全ての要素 S, T に対して $ST = TS$ が成り立つ 作用素環は、**可換環**と呼ばれる。包含関係のもとで、極大な可換部分環を、**極大可換**部分環と言う。部分環 $\mathcal{A}$ の極大可換性は次で特徴づけられる：
$$\mathcal{A} = \{A \in M_n(\mathbb{C});\ AB = BA \quad \text{for all} \quad B \in \mathcal{A}\} \tag{4.4}$$
2. 作用素環 $\mathcal{M}$ は、次の条件を満たすとき、**因子環 (Factor)** と呼ばれる：
$$\{A \in \mathcal{M};\ AB = BA \quad \text{for all} \quad B \in \mathcal{M}\} = \mathbb{C}I \tag{4.5}$$

部分因子環とは、 *-部分環で、因子環の性質をみたすものである。

4.2.1 極大可換部分環の例

1. 対角行列全体の集合 $D_n(\mathbb{C})$ は、行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の極大可換部分環である。
2. $M_n(\mathbb{C})$ の極大可換部分環 $\mathcal{A}$ は、あるユニタリー $U \in M_n(\mathbb{C})$ を用いて、次の形式で表せる：
$$\mathcal{A} = UD_n(\mathbb{C})U^*. \tag{4.6}$$

4.2.2 部分因子環の例

作用素環 $M_n(\mathbb{C})$ は、当然 $M_n(\mathbb{C})$ の最も簡単な部分因子環である。

サイズが自然数 n と k との積となっている行列環 $M_{nk}(\mathbb{C})$ は、自分自身より確実に小さい部分因子環を含むことができる。

1. $M_n(\mathbb{C})$ と $M_k(\mathbb{C})$ は $M_{nk}(\mathbb{C})$ の部分因子環と看做せる。実際には、先ず $M_{nk}(\mathbb{C})$ をテンソル積に分解 $M_{nk}(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \otimes M_k(\mathbb{C})$ する。次に $M_n(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C}) \otimes I$ と同一視し、更に $M_k(\mathbb{C})$ を $I \otimes M_n(\mathbb{C})$ と同一視することにより、部分因子環と看做すのである。

   次の様に考えるブロック行列と呼ばれる手法を用いることもある (例として $n = 2, k = 3$ の場合を記す)：
$$M_2(\mathbb{C}) \otimes I = \{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}; A, 0 \in M_2(\mathbb{C})\} \tag{4.7}$$
   ここで、0 は、2×2 ゼロ行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を意味する。
2. $M_{nk}(\mathbb{C})$ において、 $M_n(\mathbb{C})$ タイプの勝手な部分因子環 $\mathcal{B}$ は、あるユニタリ行列 $U \in M_{nk}(\mathbb{C})$ を用いて
$$\mathcal{B} = U(M_n(\mathbb{C}) \otimes I)U^* \tag{4.8}$$
   という形式に表わすことができる。

4.3 互いに直交する二つの部分環

さて、$M_n(\mathbb{C})$ には、トレース τ を用いて、(4.2) 式により、内積が導入されたことを考えると、$M_n(\mathbb{C})$ の二つの部分 *-環 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に対して、ユークリッド空間の二つの部分空間に対する直交関係の概念を、 Popa が 1983 年に導入したのは、自然な流れであろう。

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を $M_n(\mathbb{C})$ の二つの部分 *-環 とする。4.2 の最初に記したように、共に単位行列を含むものと仮定している。全ての $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\tau(A) = 0 = \tau(B) \Longrightarrow \tau(AB) = 0 \tag{4.9}$$

を満たす時、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は **互いに直交**すると言い $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ と記す。

4.3.1 極大可換部分環の対 と エントロピーの値

$M_n(\mathbb{C})$ の二つの極大可換部分環 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に対しては、4.2.1 節で述べたように、あるユニタリー $U \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して、

$$\mathcal{B} = U\mathcal{A}U^* \tag{4.10}$$

と表示できる。このユニタリー U から必然的に unistochastic 行列と呼ばれる $\tilde{U}$ が次の様な方法で導かれる：行列 U の各 (i,j) 成分を表わす複素数が $u(i,j)$ のとき、unistochastic 行列 $\tilde{U}$ の各 (i,j) 成分は $|u(i,j)|^2$ で決まる。 U のユニタリー条件 (3.14) より次が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^{n} |u(i,j)|^2 = \sum_{j=1}^{n} |u(i,j)|^2 = 1 \tag{4.11}$$

この事実を用いて、四名の数理物理学者グループ K. Życzkowski, M. Kuś, W. Słomczyński, H.-J. Sommers は、2003 年に $\tilde{U}$ に対するエントロピー $H(\tilde{U})$ を、次の形式で定義した：

$$H(\tilde{U}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \eta(|u(i,j)|^2) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |u(i,j)|^2 \log(|u(i,j)|^2) \tag{4.12}$$

ただし、右辺に現れる関数 $\eta(t) = -t\log t, (0 \le t \le 1)$ は、通常エントロピー関数と呼ばれているもので、$\eta(0) = 0$ とおかれている。関係式 (4.11) (4.12) と関数 $\eta(t)$ の性質より、

$$H(\tilde{U}) \le \log n \tag{4.13}$$

を示すことが可能であり、又、明らかに次の事実が成立する：

$$|u(i,j)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\forall i,j = 1,2,\cdots,n) \quad \Longrightarrow H(\tilde{U}) = \log n. \tag{4.14}$$

この事実を念頭において、筆者は A. Connes と E. Størmer が 1975 年に定義した相対エントロピー $H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ の概念を、少し修正した相対エントロピー $h(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ を 2008 年に導入した。($H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ 及び $h(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ の定義は少し複雑で、今までに述べたことだけでは、説明不可能なので、ここでは記さない。)

その結果、次の関係式を証明することが出来た:

$$h(\mathcal{A} \mid U\mathcal{A}U^*) = H(\tilde{U}). \tag{4.15}$$

実は、 $H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ を修正し $h(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ を筆者が定義した理由は、関係式 (4.15) が欲しかったからである。Connes と Størmer の $H(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ に対しては、この関係式 (4.15) を望めないことは、量子情報学者グループ D. Petz, A. Szántó, M. Weiner が、2009 年に反例をあげて証明している。

結論 I: (極大可換部分環の直交 ⇔ エントロピー値最大で log n) 先ず極大可換部分環 $\mathcal{A}$ とユニタリー行列 U に対して、次の同値関係を証明する：

$$|u(i,j)| = \frac{1}{\sqrt{n}},\ (\forall i, j = 1, 2, \cdots, n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \perp U\mathcal{A}U^* \tag{4.16}$$

そのうえで、上記の (4.13), (4.14) (4.15) を適用すると、結果として、次のように結論付けることが、出来た：

「$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を $n \times n$ 行列環 $M_n(\mathbb{C})$ の極大可換部分環とする。この時、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が互いに直交 ($\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$) するのは、その修正版相対エントロピー $h(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ が最大値を取るときであり、その時に限る。その最大値とは $\log n$ である」。

4.3.2 部分因子環の対 と エントロピーの値

$M_{nk}(\mathbb{C})$ の部分因子環 $M_n(\mathbb{C})$ (実際には、$M_n(\mathbb{C}) \otimes 1$ ((4.7) 参照)) を考えよう。4.2.2 節で記したように、$M_n(\mathbb{C})$ タイプの勝手な部分因子環 $\mathcal{B}$ は、あるユニタリー $U \in M_{nk}(\mathbb{C})$ を用いて (4.8) 形式で、表わせる。従って、$M_{nk}(\mathbb{C})$ の二つの部分因子環で $M_n(\mathbb{C})$ タイプのもの $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ を取り上げることは、$\mathcal{B} = U\mathcal{A}U^*$ を満たすユニタリー行列 $U \in M_{nk}(\mathbb{C})$ について調べることと、同じである。

このとき、$nk \times nk$ 行列 U は上記 (4.7) 例のような $k \times k$ ブロック行列表示され、各 (i,j) 成分 $U(i,j)$ は、$n \times n$ 行列であることに、注意したい。 $M_n(\mathbb{C})$ の正規化されたトレース τ ((4.1) 参照) を用いて、各 (i,j) と $(l.m)$ の組に対して、数値 $\widetilde{U}((i,j),(l,m))$ を次の式で定める：

$$\widetilde{U}((i,j),(l,m)) = \tau(U(l.m)^*U(i,j)) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}_n(U(l.m)^*U(i,j)) \tag{4.17}$$

この数値 (4.17) により、我々は、$n^2 \times n^2$ 行列 $\widetilde{U}$ を得る。行列 $\widetilde{U}$ は、正作用素 (3.2 節の 2 項参照) で、$\mathrm{Tr}_{n^2}(\widetilde{U}) = 1$ となることを示すことが出来る。

このことを基に、筆者は、フォン・ノイマンが次の形式で定義した $\widetilde{U}$ に対するエントロピー $S(\widetilde{U})$ を取り上げた：

$$S(\widetilde{U}) = \sum_{i=1}^{n^2} \eta(\lambda_i) \tag{4.18}$$

ただし、$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n^2}\}$ は、 $\widetilde{U}$ の重複度も含めて数え上げた固有値である。

その結果、$M_n(\mathbb{C})$ タイプの部分因子環の対 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ との直交関係を、$\mathcal{B} = U\mathcal{A}U^*$ を満たすユニタリー行列 $U \in M_{nk}(\mathbb{C})$ から導かれる行列 $\widetilde{U}$ に対するエントロピー $S(\widetilde{U})$ で次の様に、決定することが出来た：

結論 II: (部分因子環の直交 $\Leftrightarrow$ エントロピー値最大で $\log \mathbf{n}^2$) 所謂エントロピー 関数 $\eta(t) = -t \log t$ の性質と、トレースの特質により、極大可換部分環の対に対する直交関係の特徴付けと同様に、部分因子環の対に対する直交関係は、エントロピーが最大値となる事で決定付けられる。正確には、

「部分因子環の対 $\mathcal{A}$ と $U\mathcal{A}U^*$ が互いに直交 ($\mathcal{A} \perp U\mathcal{A}U^*$) するのは、$\widetilde{U}$ に対するエントロピー $S(\widetilde{U})$ が最大値を取るときであり、その時に限る。その最大値とは $\log n^2$ である」。

4.3.3 平面幾何とのある対比

4.3.1 節の結論 I と 4.3.2 節の結論 II に述べた二つの数学的事実は、例えば、ユークリッド幾何における次の事実を連想させるだろうか：

「一辺の長さが n センチメートル である菱形を考えよう。このとき、この菱形の面積の値が最大になるのは、互いに交わる二つの辺が直交するときで、その時に限る。その最大値とは n^2 平方センチメートル である」。

＊ 在庫雑誌の案内

協会事務の部屋が海外からの雑誌で手狭になってきています。そこで希望の会員または所属する大学等に、**無償**でお分けすることにしています。ご希望がありましたら、pbls@jams.jp にご連絡下さい。**送料は負担で**お送りいたします。なお、会員個人でも結構です。皆様方のご協力をお願い致します。

雑誌（a）

1． Serdica mathematical journal
2． Colloquium mathematicum
3． Monatshefte fur mathematik
4． Milan journal of mathematics
5． Naval research logistics NRL a journal dedicated to advances in operations and logistics research
6． Rendiconti del seminario matematico universita e politecnico torino
7． Analytic function spaces properties of operation and duality
8． Iranian Journal of fuzzy systems
9． Publicationes mathematicae Debrecen

11.Annali dell'universita di ferrara scienze matematiche

雑誌(b)

1. Acta scientiarum mathematicarum
2. Numerical mathematics　A journal of Chinese universities
3. University of istanbull faculty of science　the journal of mathematics, physics and Astronomy
4. Academie serbe des sciences et des arts bulletin T.CXXXI—sciences mathematique
5. Glasnik matematica
6. Annali dell’universita di ferrara nuova serie　scienze matematiche
7. Divulgaciones matematicas
8. Dirasat engineering sciences
9. Tamkang journal of mathematics
10 .Annals de L’institute Fourier
11 .Bollettino della unione mathematica italiana sezione (A, B)

雑誌(c)

1. Annales universitatis scientiarum budapestinesis de Rolando eotvos nominatae
2. Bulletin mathematique de la societe des sciences mathematiques de roumanie
3. Ion beam science solved and unsolved
4. Annals of the university of Craiova mathematics and computer science series
5. Mathematicae notae
6. Statistica sinica
7. IBM journal of research and development
8. Analeles stintifice ale universitatii Alexandru ioan cuza din iasi (serie noua) matematica
9. Scientific annals of computer science
10. Atti della academia nazionale dei lince rendiconti lincei scienze fisiche e naturali
11. Tohoku Mathematical Journal 東北数学雑誌

雑誌（d）

1. Rivista di matematica della universita di parma
2. Bolletino della unione mathematica italiana (sezione A, B)
3. Revista tecnica
4. Matematica contemporanea
5. Studia universitatis babes-bolyai mathematica cluj-napoca
6. Academie roumaine filiale de cluj-napoca
7. Bolletino di storia delle scienze matematiche
8. Analele universitatii de vest din Timisoara seriamathematica-informatica
9. Relatorio de pesquisa
10. Annals de L’institute Fourier

11. Allosteric proteins

12. Changing models

雑誌 (R)

1. у к р а ё н с ь к и й　м а м е м а м ц ч н и й　ы с н ц к　(Ukrainian Mathematical Bulletin)

2. Т Е О Р И Я　В Е Р О Я Т Н О С Т Е Й

3. З А П И К И　Н А У Ч Н Ы Х　С Е М И Н А Р О В　П О М И

4. М А Т Е М А Т И К А　(Izvestiya NAN Armenii, Matematika)

5. К И Б Е Р Н Е Т И К А　И　С И С Т Е М Н Ы Й　А Н А Л И З

＊　機関会員募集

機関会員の特典としては

(1)本屋より SCMJ を購入すると、print 版 45,000 円ですが、機関会員になると、print 版 33,000 円で **online も見ることができます。**

(2)会員でない 2 名の方を準会員（会費不要）として登録することができます。これにより、page charge ⑽別刷代金⑾ が会員と同じ扱いになります。

(3)上の準会員 2 名は online で SCMJ を見る事ができます。

(4) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。大学、研究所等が協会から SCMJ 誌の直接購入すると、今年から online も無料で見ることができるようになりました。機関会員の申込用紙です。適当にお使い下さい。

上にも書きましたように、2006 年より発効の機関会員制度により各機関会員に所属の研究者 2 名を会費無料で準会員として登録しますと、準会員が SCMJ に accept された論文を掲載するときの page charge（別刷代金）は会員と同額とすることにしました。

この新しい制度の機関会員の P.R.を、日本国内外（BRICS 諸国など）400 大学に向けて、昨年 1 月から始めています。同時に今迄の SCMJ 投稿者で会員でない方、また、個人会員および（機関会員の）準会員加入の P.R.も始めています。

＊ **Application for Academic and Institutional Member of ISMS**

Subscription of SCMJ	□Print ＋ Online (¥33,000,　US$300)
University (Institution)	
Department	
Postal Address where SCMJ should be sent.	
E-mail address	
Person in charge	Name: Signature:
Payment Check one of the two.	□Bank transfer　　　　□Credit Card (Visa, Master)
Name of Associate Members	1.
	2.

正会員の特典としては(1)online で SCMJ をみることが出来ます。(2)論文の掲載時に page charge(別刷代金)が随分と安くなる。
(3) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。6,000 円を支払うと、hard-copy の SCMJ が一年を通じて手に入ります。
(4) 10 年間個人会員を続けると、国内会員は 70,000 円、外国会員は US$600、途上会員は US$500 を支払うと生涯会員となれます。

2008 年度からの会費

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US$75，　€60	US$117，€93
3 年 A 会員	¥24,000	US$200，　€160	US$117，€93
単年度 S 会員	¥5,000	US$40，　€32	US$27，　€21
3 年 S 会員	¥12,000	US$100，　€80	US$71，€57
生涯会員	¥90,000	US$740，　€592	US$616，€493

日本語が出来る方の入会の申込用紙です。また、英語版も書いて頂くことになります。近く Net 上で申し込み可能となるようにしますので、入会しようとする方はそれをご利用下さい。

＊　正会員申込用紙

正会員入会申込書

<table>
<tr><td>氏名</td><td colspan="2"></td><td>英語名</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">次の２つのうち会報等を送付先とする方に○を付けてお書き下さい。</td></tr>
<tr><td>所属先
住所</td><td colspan="4">〒</td></tr>
<tr><td>住所</td><td colspan="4">〒</td></tr>
<tr><td>専門分野</td><td colspan="4">表 f *より選んで○で囲って下さい
f-1, f-2, f-3, f-4, f-5, f-6, f-7, f-8, f-9, f-10, f-11, f-12, f-13, f-14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E-mail
address</td><td rowspan="2"></td><td>電話番号</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Fax 番号</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>会員区分
該当部分にチェック</td><td colspan="4">□A1 一般 1 年　□ A3 一般 3 年　□ S-A1 高齢者又は学生 1 年
□　S-A3 高齢者又は学生 3 年　□ 生涯会員</td></tr>
<tr><td>所属先の
施設</td><td colspan="4">□ ビデオ会議可能　□ 遠隔会議可能　□ コンピューターセンター</td></tr>
<tr><td>所属先の
通信システム</td><td colspan="4">□　ISDN　□ IP</td></tr>
<tr><td>所属大学等が
機関会員</td><td colspan="4">□　会員である　□　会員でない</td></tr>
<tr><td colspan="5">SCMJ のプリント版の購入</td></tr>
<tr><td colspan="3">□　希望　1 年に付き
1 年会員 9,000 円、3 年会員 8,000 円**</td><td colspan="2">□ 希望しない</td></tr>
<tr><td>高齢会員を申し込む場合</td><td colspan="2">生年月日</td><td colspan="2">学生会員の場合は在学証を添付</td></tr>
<tr><td>日付</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3">私は ISMS 会員になり、国際数理科学協会に送り状に記載された年会費を払います。ISMS 会員として受け取った Scientiae Mathematicae Japonicae のコピーは個人使用とし、機関、大学または図書館やその他の組織の中に置かず、閲覧目的で会員購読することもしません。</td><td>署名</td><td></td></tr>
</table>

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。**ただし、3 年間一括の場合は 24,000 円です。
この申込みの内容は会との連絡以外には使用いたしません。

Application form for an individual member of ISMS

<table>
<tr><td>Family Name</td><td></td><td>First &Middle Name</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Check one of the following addresses to which “Notices from the ISMS” should be sent.</td></tr>
<tr><td>Address of your institution (university)</td><td colspan="3">□</td></tr>
<tr><td>Home address</td><td colspan="3">□</td></tr>
<tr><td>Special fields*</td><td colspan="3">f-1 f-2 f-3 f-4 f-5 f-6 f-7 f-8 f-9 f-10 f-11 f-12 f-13 f-14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E-mail address</td><td rowspan="2"></td><td>Tel.</td><td></td></tr>
<tr><td>Fax</td><td></td></tr>
<tr><td>Membership category**
(Circle one)</td><td colspan="3">A1, A3, SA1, SA3, F1, F3, SF1, SF3, D1, D3, SD1, SD3, AL, FL, DL</td></tr>
<tr><td>Check the facilities your institution has.</td><td colspan="3">☐ Conference room(s) for video conference
☐ Computer center</td></tr>
<tr><td colspan="2">Communication system of your institution</td><td colspan="2">□ ISDN □ IP</td></tr>
<tr><td colspan="2">Is your institution (university) an Institutional Member of ISMS?</td><td colspan="2">□ Yes □ No</td></tr>
<tr><td>☐ I subscribe to the printed version of SCMJ.</td><td colspan="3">□¥6,000 (US$60, €48) per year for those members of A1, SA1, F1, and SF1 , D1 and SD1.
□¥5,500 (US$55. €44) per year for those members of A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, and DL.
□In case A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, or DL members make the payment at a time in advance, the price for 3 years is ¥15,000 (US$150, €120).</td></tr>
<tr><td>For the aged member, write your birth year.</td><td></td><td colspan="2">For the student member, student registration certificate should be attached.</td></tr>
<tr><td>Date of Application</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="4">I wish to enroll as a member of ISMS and will pay to International Society for Mathematical Sciences the annual dues upon presentation of an invoice. Copies of Scientiae Mathematicae Japonicae received as an ISMS member will be for my personal use only and shall not be placed in institutional, university or other libraries or organizations, nor can membership subscriptions be used for library purposes.</td></tr>
<tr><td>Signature</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。

**Notices from the ISMS March 2008 p.28 を御参照下さい。

ISMS (JAMS の継続) 会員募集

ISMS の出版物：ISMS は、創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得ている Mathematica Japonica (M.J.)と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ、Scientiae Mathematicae (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、"21 世紀 MJ/SCM New Series, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) "として、電子版は 2000 年 9 月より発行してきました。印刷版は、1978 年 1 月より、年間 6 冊、700～1200 頁を出版しています。全体として 230 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の 1)～７)です。

1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外 15 カ国の著名な研究者 40 名が参加している。
2) 世界の research group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
3) Editor を窓口として直接論文を投稿できて、迅速な referee 及び出版が得られる。
4) 有名な数理科学者の original paper や、研究に役立つ survey が、毎号載せられている。
5) SCMJ は、世界の有名数理科学者による、極めて興味ある expository paper を、毎号 International Plaza 欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
6) 投稿論文は、accept 後 (又は組版後) 待ち時間０で発行されます。
7) Mathematical Review, Zentralblatt に from cover to cover で review されている。

ISMS の研究集会：(1)研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究集会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2)ISMS には内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高い level の研究会が online で行われる事を期待している。（本誌 45 号 3p 及び Notices March 2006 9p を御参照下さい）

ISMS の学術賞：会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS 賞、JAMS 賞、Shimizu 賞、Kunugui 賞、Kitagawa 賞を設けている。（詳しくは本誌 45 号 2p 会則 13 条を御参照下さい）

＜ISMS の会員の特典＞１．SCMJ 電子版の購読 (print out も含む) 無料。２．SCMJ print 版の少額での購読 (下表１)。３．Page charge(別刷代金)の discount (下表２)。

＜機関購読会員の特典＞1. 機関内の 2 名の方を準会員として会費無料で登録することが出来る。２．準会員は会員と同じ page charge(別刷代金)の discount を受けることが出来る。

表１
【雑誌購読費】

	正会員（1 年）	正会員（3 年）	機関会員	定価
Print	￥6,000 US$ 60, €48	￥5,500* US$ 55, €44	￥33,000 US$ 300, €240	￥45,000 US$ 400, €320
Online	Free	Free		
Online+print	￥6,000 US$ 60, €48	￥5,500 US$ 55, €44	￥33,000 US$ 300, €240	￥45,000 US$ 400, €320

*３年会員のみ、雑誌購読費３年分前払いの場合は￥15,000 になります。
著者の方には、SCMJ を１冊送料込みで 1,200 円または US＄12 で購入できます。

表２
【ページチャージ】

	ISMS members	Non-members
p	￥3,500 (US$35, € 23)	￥4,000 (US$40, €27)
Tex	￥2,000 (US$20, € 14)	￥2,500 (US$25, €17)
LateX2e, LaTeX	￥ 700 (US$ 7, € 4)	￥1,000 (US$10, € 7)
Js (ISMS style file)	￥ 500 (US$ 5, € 3)	￥ 800 (US$ 8, € 5)

別刷作成について、次の費用の分担をお願いします。原稿の組版についての連絡費、抜刷送料等の事務処理として、一編について¥ 1,000、及び上表の各原稿の種類による組版費を請求させて頂きます。
（2008 年 Vol.67 から実施）

表３
【2008 年の会費】

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US$ 75, €60	US$ 45 , €36
3 年 A 会員	¥24,000	US$ 200, €160	US$ 117, €93
単年度 S 会員	¥5,000	US$ 40, €32	US$ 27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US$ 100, €80	US$ 71, €57
生涯会員**	¥90,000	US$ 740, €592	US$ 616, €493

**過去 10 年以上、正会員であった方に限る。
A 会員は正会員を指し、S 会員は、学生会員と高齢会員(70 歳以上)を指します。

国際数理科学協会
International Society for Mathematical Sciences
〒590-0075 堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内
Tel：(072)222-1850 / Fax：(072) 222-7987 URL：http://www.jams.or.jp