国際数理科学協会会報

No.57/ 2008.5　　編集委員: 藤井正俊(委員長)、藤井淳一

目次

＊ 適合度検定

適合度検定

国際数理科学協会　長尾　壽夫

1. はじめに

随分昔 1970 年のはじめごろ, 熊本大学教養部で初めて統計学を教えていたころの話である. その当時, 初等といえども統計の本は今日ほど多くはなく, そこから自分にあったと思われる本を選んで使っていた. ただ, どの本を見ても「適合度検定」の項は書かれてはいるのであるが, 全てといっていいほどカイ自乗検定が書かれていた. 仮説の下で, 大標本ではカイ自乗分布となるが, その自由度を与えるほど授業内容は高くはなかったが, 証明は本によって随分と異なるように思えた. 同じように仮説の下で, 確率がある母数の関数で表現されたとき自由度はその表現される母数の数だけ自由度は下がる. 果たして無条件になるのであろうか. よく知られていることであるが, 証明を書きとどめることにする. 次に, 下の 2×2 の分割表を考える.

A \ B	B	$\bar{B}$	計
A	N_{11}	N_{12}	$N_{1\cdot}$
$\bar{A}$	N_{21}	N_{22}	$N_{2\cdot}$
計	$N_{\cdot 1}$	$N_{\cdot 2}$	n

上の各セルは同時に起こったときの数を表す. 仮説を事象 A, B が独立であることを検定するさいに, n が小さいときフィッシャーの直接確率計算法を用いる方法がある. そのとき, 条件付確率を計算するさい $N_{1\cdot}, N_{\cdot 1}$ が独立であることを示す必要がある. 一見明らかなような気もするが, ここでは少し数学的な証明を与える. 読者が一人でも更なる問題を考え種々の興味を持っていただくと望外の喜びである. そこで, 適合度検定から説明を始めることにする.

2. カイ自乗検定

k 個の事象 $A_1, \cdots, A_k$ の確率を $p_1, \cdots, p_k$ とする. ただし, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. そこで, n 回の観測により, 無作為標本 $X_1, \cdots, X_n$ を得たとする. ただし, $X_i = (x_{i1}, \cdots, x_{ik})$ である. なお, $\sum_{j=1}^k x_{ij} = 1$ であり, $x_{ij} = 0$ か $x_{ij} = 1$ である. $x_{ij} = 1$ となるのは, A_j が起こるときである. このとき, $p_{i0} (i = 1, \cdots, k)$ を既知とし, 仮説 H: $p_1 = p_{10}, \cdots, p_k = p_{k0}$ を対立仮説 K: ある i で $p_i \neq p_{i0}$ に対しての検定を考える. λ を尤度比検定とすると,

$$-2 \log \lambda = 2 \sum_{i=1}^{k} N_i \log(N_i/(np_{i0})) \tag{2.1}$$

となる. ただし, N_i は $X_1, \cdots, X_n$ の第 i 成分の和である. すなわち, A_i が起こった回数を表す. この値 (2.1) が, ある値より大きいとき, 仮説を棄却する. この統計量はよく知られた統計量ではあるが, $N_i = 0$ の件があり, 通常の本にあまり紹介されていない. ここでは仮説の下で極限分布を見てみる. 中心極限定理を用いる為に $Y_i = (N_i - np_{i0})/\sqrt{np_{i0}} (i = 1, \cdots, k)$ とおく.

$(Y_1,\cdots,Y_{k-1})$ の極限分布は中心極限定理により，$(k-1)$ 次元正規分布となる．仮説の下で (2.1) は $-2\log\lambda = \sum_{i=1}^{k-1}Y_i^2 + (\sum_{i=1}^{k-1}\sqrt{p_{i0}}Y_i)^2/p_{k0}$ + lower order　と表せる．すると，

$$\sum_{i=1}^{k-1}Y_i^2 + (\sum_{i=1}^{k-1}\sqrt{p_{i0}}Y_i)^2/p_{k0} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-np_{i0})^2}{np_{i0}} = \chi^2 \tag{2.2}$$

となり, この最初の項はカイ自乗検定統計量である．

ここで，仮説 H の下で カイ自乗統計量の極限分布を求める．まず，$(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})' = (\sqrt{p_{10}},\cdots,\sqrt{p_{k-1\,0}})$ とおくと，

$$\frac{(N_k-np_{k0})^2}{np_{k0}} = \frac{1}{p_{k0}}(Y_1,\cdots,Y_{k-1})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_{k-1}\end{pmatrix}$$

従って，

$$\chi^2 = (Y_1,\cdots,Y_{k-1})\left(\mathbf{I}+\frac{1}{p_{k0}}(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'\right)\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_{k-1}\end{pmatrix}$$

一方，$(Y_1,\cdots,Y_{k-1})$ の極限分布は中心極限定理により，$(k-1)$ 次元正規分布であり，平均は $\mathbf{0}$，分散行列 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}-(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'$ である．従って，$\boldsymbol{\Sigma}$ は正定値行列であり, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ となる対称行列 $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ が定義される．$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(Y_1,\cdots,Y_{k-1})'$ を考えると，この $\boldsymbol{z}$ は漸近的に $(k-1)$ 次元正規分布となり，平均 $\mathbf{0}$，分散行列 $\mathbf{I}$ を持つ．ただし，

$$\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} = \left(\mathrm{I}-\frac{(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'}{1-p_{k0}}\right)+\sqrt{p_{k0}}\frac{(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'}{1-p_{k0}} \tag{2.3}$$

ゆえに，

$$\chi^2 = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\left(\mathbf{I}+\frac{1}{p_{k0}}(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'\right)\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{z}$$

$\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2}) = \sqrt{p_{k0}}(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})$ であるから，

$$\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\left(\mathbf{I}+\frac{1}{p_{k0}}(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'\right)\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} = \mathbf{I}$$

となる．従って，次の定理を得る．

定理 1. 仮説 H：$p_i = p_{i0}$ $(i=1,\cdots,k)$ の下で，χ^2 で与えられる カイ自乗統計量は漸近的に自由度 $(k-1)$ の χ^2 分布になる．

次に確率 p_i が仮説の下で未知母数 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\cdots,\theta_q)'$ の関数 $p_i(\boldsymbol{\theta})$ $(i=1,\cdots,k)$ として，表されるときを考える．$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量とし，$\hat{p}_i = p_i(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ とおく．このとき，

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \tag{2.4}$$

とおき，(2.4) の極限分布を求める．このような問題は，例えば，確率変数 X がポアソン分布 $\mathcal{P}(\lambda)$ に従っているかどうかを仮説とするとき生じる．ただし，λ は未知である．そこで $A_{i+1} = \{X = i\}$ $(i=0,1,\cdots,k-2)$, $A_k = \{X \geq k-1\}$ とし，$p_i = \mathrm{P}(A_i)$ とすると，この p_i は λ の関数となる．λ の最尤推定量を $\hat{\lambda}$ として，$\hat{p}_i$ を求めることによって (2.4) を用いて検定を行う．すると，n が大きいとき，仮説の下で (2.4) の χ^2 の分布を求める必要が生じる．(2.4) の極限分布を求めるために，$X, X_1,\cdots,X_n$ を独立とし，その分布は k 次元多項分布 $\mathrm{Mult}(p_1(\boldsymbol{\theta}),\cdots,p_k(\boldsymbol{\theta});1)$ に従うとする．$X_1,\cdots,X_n$ の対数尤度を $L(\boldsymbol{\theta})$ で表すと，

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{k-1}N_i\log p_i(\boldsymbol{\theta}) + N_k\log\left(1-\sum_{i=1}^{k-1}p_i(\boldsymbol{\theta})\right) \tag{2.5}$$

となる．$\hat{\boldsymbol{\theta}}$ を $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量とする．テイラー展開により，適当な $\boldsymbol{\eta}$ を $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ と $\boldsymbol{\theta}$ とを結ぶ線上の点ととると，

$$0 = \frac{\partial L(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\theta_j} = \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j} + \sum_{s=1}^{q}\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\eta})}{\partial\theta_j\partial\theta_s}(\hat{\theta}_s-\theta_s) \quad (j=1,\cdots,q)$$

である．$\boldsymbol{\eta}$ は j に依存するが，ここでは，代表して以後 $\boldsymbol{\eta}$ と書くことにする．従って，上の式をベクトルで表すと，

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_q} \end{pmatrix} + \mathrm{R}(\boldsymbol{\eta}) \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 - \theta_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_q - \theta_q \end{pmatrix}$$

となる．ただし，$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = (r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}))$ とおくと，

$$r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_\alpha\partial\theta_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \cdots, q \tag{2.6}$$

である．(2.5) を微分することにより，

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i(\boldsymbol{\theta}))}{p_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial\theta_j} p_i(\boldsymbol{\theta}) \quad (j = 1, \cdots, q)$$

である．

$$\boldsymbol{v}' = \left(\frac{N_1 - np_1(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{np_1(\boldsymbol{\theta})}}, \cdots, \frac{N_k - np_k(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{np_k(\boldsymbol{\theta})}} \right)$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_q} \end{pmatrix} = \sqrt{n}\mathbf{M}\boldsymbol{v}$$

となる．ただし，

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{p_1(\boldsymbol{\theta})}} \dfrac{\partial}{\partial\theta_1} p_1(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \dfrac{1}{\sqrt{p_k(\boldsymbol{\theta})}} \dfrac{\partial}{\partial\theta_1} p_k(\boldsymbol{\theta}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{\sqrt{p_1(\boldsymbol{\theta})}} \dfrac{\partial}{\partial\theta_q} p_1(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \dfrac{1}{\sqrt{p_k(\boldsymbol{\theta})}} \dfrac{\partial}{\partial\theta_q} p_k(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

従って，

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 - \theta_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_q - \theta_q \end{pmatrix} = -\left(\frac{1}{n} \mathrm{R}(\boldsymbol{\eta}) \right)^{-1} \mathbf{M}\boldsymbol{v}$$

(2.6) より，

$$r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\theta_\alpha\partial\theta_\beta} \log f(X_i|\boldsymbol{p})$$

ただし，$\boldsymbol{p} = (p_1(\boldsymbol{\theta}), \cdots, p_k(\boldsymbol{\theta}))$ であり，$f(X_i|\boldsymbol{p})$ は多項分布 Mult$(\boldsymbol{p}, 1)$ を表す確率関数である．大数の弱法則によって，

$$\frac{1}{n} r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_\alpha\partial\theta_\beta} \log f(X|\boldsymbol{p})\right) = -\mathrm{E}\{(\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \log f(X|\boldsymbol{p}))(\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} \log f(X|\boldsymbol{p}))\}$$

となる．また, 簡単な計算により,

$$\mathrm{E}\{(\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \log f(X|\boldsymbol{p}))(\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} \log f(X|\boldsymbol{p}))\} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i(\boldsymbol{\theta})} (\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} p_i(\boldsymbol{\theta}))(\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} p_i(\boldsymbol{\theta}))$$

となるから，$\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) = (r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\eta}))$ とおくと，

$$-\left(\frac{1}{n} \mathrm{R}(\boldsymbol{\eta}) \right) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{MM}'$$

次に，

$$\boldsymbol{u}' = \left(\frac{n(\hat{p}_1 - p_1(\boldsymbol{\theta}))}{\sqrt{np_1(\boldsymbol{\theta})}}, \cdots, \frac{n(\hat{p}_k - p_k(\boldsymbol{\theta}))}{\sqrt{np_k(\boldsymbol{\theta})}}\right)$$

とおく．テイラー展開によって，$\boldsymbol{\eta}$ を $\boldsymbol{\theta}$ と $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ とを結ぶ線分上のある点とすると，

$$\hat{p}_i - p_i(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial}{\partial\theta_j} p_i(\boldsymbol{\eta})(\hat{\theta}_j - \theta_j) \quad (i = 1, \cdots, k)$$

となるから，

$$\frac{n(\hat{p}_i - p_i(\boldsymbol{\theta}))}{\sqrt{np_i(\boldsymbol{\theta})}} = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{\sqrt{p_i(\boldsymbol{\theta})}} \frac{\partial}{\partial\theta_j} p_i(\boldsymbol{\eta})\sqrt{n}(\hat{\theta}_j - \theta_j) \quad (i = 1, \cdots, k)$$

従って，

$$\boldsymbol{u} = \tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\eta})' \begin{pmatrix} \sqrt{n}(\hat{\theta}_1 - \theta_1) \\ \vdots \\ \sqrt{n}(\hat{\theta}_q - \theta_q) \end{pmatrix} = -\tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\eta})' \left(\frac{1}{n}\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})\right)^{-1} \mathbf{M}\boldsymbol{v}$$

と表される．ただし，$\tilde{\mathsf{M}}(\boldsymbol{\eta})$ の成分は (2.7) の $\partial p_j(\boldsymbol{\theta})/\partial\theta_i$ が $\partial p_j(\boldsymbol{\eta})/\partial\theta_i$ となっている点である．上の $\tilde{\mathsf{M}}(\boldsymbol{\eta}), \mathsf{R}(\boldsymbol{\eta})$ の中の $\boldsymbol{\eta}$ は一般には同じではないが，$n \to \infty$ のとき，共に $\boldsymbol{\eta} \xrightarrow{\mathsf{P}} \boldsymbol{\theta}$ である．すると，

$$\tilde{\mathsf{M}}(\boldsymbol{\eta}) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{M}$$

である．ベクトル $\boldsymbol{v}$ には，明らかに一次関係が存在するから，

$$\boldsymbol{v}_*' = \left(\frac{N_1 - np_1(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{np_1(\boldsymbol{\theta})}}, \cdots, \frac{N_{k-1} - np_{k-1}(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{np_{k-1}(\boldsymbol{\theta})}}\right)$$

とおくと，$\boldsymbol{v} = \mathbf{A}\boldsymbol{v}_*$ となる．ただし，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{I}_{k-1} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{p_k(\boldsymbol{\theta})}}(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})' \end{pmatrix}$$

であり，$(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})' = (\sqrt{p_1(\boldsymbol{\theta})}, \cdots, \sqrt{p_{k-1}(\boldsymbol{\theta})})$ である．従って，

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n\hat{p}_i)^2}{np_i(\boldsymbol{\theta})} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})'(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$$

と表される．よって，

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \left(\mathbf{I}_k + \tilde{\mathsf{M}}(\boldsymbol{\eta})' \left(\frac{1}{n}\mathsf{R}(\boldsymbol{\eta})\right)^{-1} \mathsf{M}\right) \mathbf{A}\boldsymbol{v}_*$$

である．$\boldsymbol{v}_*$ の漸近分布は $(k-1)$ 次元正規分布で平均 $\mathbf{0}$，分散行列 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_{k-1} - (\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'$ となる．(2.3) と同じように $\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$ を定めると，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{v}_*$ は漸近的に $(k-1)$ 次元正規分布に法則収束し，平均 $\mathbf{0}$，分散行列 $\mathbf{I}_{k-1}$ となる．そこで，

$$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})'(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{z}'\mathbf{Q}_n(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{z}$$

とおく．ただし，

$$\mathsf{Q}_n(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{A}' \left(\mathsf{I}_k + \mathsf{M}' \left(\frac{1}{n}\mathsf{R}(\boldsymbol{\eta})\right)^{-1} \tilde{\mathsf{M}}(\boldsymbol{\eta})\right) \left(\mathsf{I}_k + \tilde{\mathsf{M}}(\boldsymbol{\eta})' \left(\frac{1}{n}\mathsf{R}(\boldsymbol{\eta})\right)^{-1} \mathsf{M}\right) \mathsf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$$

すると，$n \to \infty$ のとき，

$$\mathsf{Q}_n(\boldsymbol{\eta}) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{Q} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathsf{A}' \left(\mathsf{I}_k - \mathsf{M}'(\mathsf{M}\mathsf{M}')^{-1}\mathsf{M}\right) \mathsf{A}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}$$

となる．次に，行列 Q は対称であるから，$Q^2 = Q$ を示す．まず，

$$\begin{aligned}A'A &= I_{k-1} + \frac{1}{p_k}(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})' \\ &= \left(I_{k-1} - \frac{(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'}{1-p_k}\right) + \frac{1}{p_k}\frac{(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})(\boldsymbol{p}_{k-1}^{1/2})'}{1-p_k}\end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}A'A\boldsymbol{\Sigma}^{1/2} = I_{k-1}$ である．また，$(\boldsymbol{p}^{1/2})' = (\sqrt{p_1(\boldsymbol{\theta})}, \cdots, \sqrt{p_k(\boldsymbol{\theta})})$ とおくと，$M(\boldsymbol{p}^{1/2}) = \mathbf{0}$，$A'(\boldsymbol{p}^{1/2}) = \mathbf{0}$，$A\boldsymbol{\Sigma}A' = I_k - (\boldsymbol{p}^{1/2})(\boldsymbol{p}^{1/2})'$ であることを用いることによって，$Q^{\mathbf{2}} = Q$ となる．従って，Q のランクは trQ に等しい．

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}Q &= \mathrm{tr}(A'A)\boldsymbol{\Sigma} - \mathrm{tr}M'(MM')^{-1}MA\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}' \\ &= k-q-1\end{aligned}$$

これより，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i - n\hat{p}_i)^2}{np_i}$$

は自由度 $(k-q-1)$ の χ^2 分布に収束する．
最後に，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i - n\hat{p}_i)^2}{np_i} + \sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i - n\hat{p}_i)^2}{np_i}\left(\frac{p_i}{\hat{p}_i} - 1\right)$$

であるから，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i - n\hat{p}_i)^2}{np_i}\left(\frac{p_i}{\hat{p}_i} - 1\right) \xrightarrow{P} 0 \tag{2.8}$$

を示すとよい．

$$\max_{1\leq i\leq k}\left|\frac{p_i}{\hat{p}_i} - 1\right| \leq \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{p_i}{\hat{p}_i} - 1\right| \xrightarrow{P} 0$$

であるから，(2.8) が示せた．これより，

定理 2. $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_q)'$ を未知母数とし，仮説の下で確率 p_i が $\boldsymbol{\theta}$ の関数で表され，(2.7) の行列 $\mathbf{M}$ のランクが q であるとき，(2.4) で与えられる カイ自乗統計量は漸近的に自由度 $(k-q-1)$ の χ^2 分布に収束する．

3. $k \times l$ 分割表の周辺分布の独立性

はじめの適合度検定に戻って, 標本数 n が小さいとき, フィッシャーの直接確率計算法を用いるとき, 事象の独立性を示す必要が生じる．当時書かれている本では証明まで書いてあるのは知る限りでは一冊だけであった．そこでは, ここでの記号を用いて書くと,「A と B が独立であるから,n 回の独立試行における周辺分布が,$N_{11}+N_{12}, N_{21}+N_{22}, N_{11}+N_{21}, N_{12}+N_{22}$ である確率は

$$\begin{aligned}&\Pr(N_{11}+N_{12}, N_{21}+N_{22}, N_{11}+N_{21}, N_{12}+N_{22}) \\ &= \binom{n}{N_{11}+N_{12}}\Pr(A)^{N_{11}+N_{12}}(1-\Pr(A))^{N_{21}+N_{22}} \\ &\times\binom{n}{N_{11}+N_{21}}\Pr(B)^{N_{11}+N_{21}}(1-\Pr(B))^{N_{12}+N_{22}} = \cdots\end{aligned} \tag{3.1}$$

」と書かれている．この上式の意味は $n_{1\cdot}, n_{2\cdot}, n_{\cdot 1}, n_{\cdot 2}$ を固定した非負の整数とすると, $\Pr(N_{11}+N_{12} = n_{1\cdot}, N_{21}+N_{22} = n_{2\cdot}, N_{11}+N_{21} = n_{\cdot 1}, N_{12}+N_{22} = n_{\cdot 2})$ を考える．_ $N_{11}+N_{12} = n_{1\cdot}, N_{21}+N_{22} = n_{2\cdot}$ は n 回の独立試行より, 例えば A が最初 $n_{1\cdot}$ 回, その後, $\bar{A}$ が $n_{2\cdot}$ すなわち, $\overbrace{(A, \cdots, A, \bar{A}, \cdots, \bar{A})}^{n}$ 同様に $N_{11}+N_{21} = n_{\cdot 1}, N_{12}+N_{22} = n_{\cdot 2}$ については最初 B が $n_{\cdot 1}$ 回, その後 $\bar{B}$ が $n_{\cdot 2}$ すなわち, $\overbrace{(B, \cdots, B, \bar{B}, \cdots, \bar{B})}^{n}$ これらが同時に起こるのであるから次が得られる．

$$\begin{aligned}&\Pr(N_{11}+N_{12} = n_{1\cdot}, N_{21}+N_{22} = n_{2\cdot}, N_{11}+N_{21} = n_{\cdot 1}, N_{12}+N_{22} = n_{\cdot 2}) \\ &= \binom{n}{n_{1\cdot}}\Pr(A)^{n_{1\cdot}}(1-\Pr(A))^{n_{2\cdot}}\binom{n}{n_{\cdot 1}}\Pr(B)^{n_{\cdot 1}}(1-\Pr(B))^{n_{\cdot 2}}\end{aligned} \tag{3.2}$$

この考え方に従うと一般的な下の場合は容易にも得られるがここでは別のやり方で求める．

$A \backslash B$	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_l	計
A_1	N_{11}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	N_{1l}	$N_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	$\vdots$		N_{ij}		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_k	N_{k1}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	N_{kl}	$N_{k\cdot}$
計	$N_{\cdot 1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$N_{\cdot l}$	n

全事象が $A_1,\cdots,A_k$ に及び $B_1,\cdots,B_l$ に分割されているとき, n 回実験を行い $A_i \cap B_j$ が起こる回数を N_{ij} とし, A_i が起こる回数を $N_{i\cdot}$,B_j が起こる回数を $N_{\cdot j}$ とする. 上の表を参照. これより, $N_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{l} N_{ij}, N_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{k} N_{ij}$. このとき, $\Pr(A_i \cap B_j)=\Pr(A_i)\Pr(B_j),(i=1,\cdots,k;j=1,\cdots,l)$ の下で, $(N_{1\cdot},\cdots,N_{k\cdot})$ と $(N_{\cdot 1},\cdots,N_{\cdot l})$ が独立であり, $(N_{1\cdot},\cdots,N_{k\cdot})$ の分布は確率 $(p_{1\cdot},\cdots,p_{k\cdot})$ を持つ k 項分布である. ただし, $p_{i\cdot}=\Pr(A_i)(i=1,\cdots,k)$ である. 同様に, $(N_{\cdot 1},\cdots,N_{\cdot l})$ の分布は確率 $(p_{\cdot 1},\cdots,p_{\cdot l})$ を持つ l 項分布である. ただし, $p_{\cdot j}=\Pr(B_j)(j=1,\cdots,l)$ である. これを示すために, 次の確率母関数を考える. ただし, $a_1,\cdots,a_k,b_1,\cdots,b_l$ は正の数である.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(a_1^{N_{1\cdot}}\cdots a_k^{N_{k\cdot}} b_1^{N_{\cdot 1}}\cdots b_l^{N_{\cdot l}}) = \mathrm{E}((a_1b_1)^{N_{11}}(a_1b_2)^{N_{12}}\cdots(a_kb_l)^{N_{kl}})\\
&= (a_1b_1p_{11}+a_1b_2p_{12}+\cdots+a_kb_lp_{kl})^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_1b_1p_{1\cdot}p_{\cdot 1}+a_1b_2p_{1\cdot}p_{\cdot 2}+\cdots+a_kb_lp_{k\cdot}p_{\cdot l})^n\\
&= (a_1p_{1\cdot}+a_2p_{2\cdot}+\cdots+a_kp_{k\cdot})^n(b_1p_{\cdot 1}+b_2p_{\cdot 2}+\cdots+b_lp_{\cdot l})^n\\
&= \sum \frac{n!}{n_{1\cdot}!\cdots n_{k\cdot}!}(p_{1\cdot}a_1)^{n_{1\cdot}}\cdots(p_{k\cdot}a_k)^{n_{k\cdot}} \times \sum \frac{n!}{n_{\cdot 1}!\cdots n_{\cdot l}!}(p_{\cdot 1}b_1)^{n_{\cdot 1}}\cdots(p_{\cdot l}b_l)^{n_{\cdot l}}
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

これより,

$$
\begin{aligned}
&\Pr(N_{1\cdot}=n_{1\cdot},\cdots,N_{k\cdot}=n_{k\cdot},N_{\cdot 1}=n_{\cdot 1},\cdots,N_{\cdot l}=n_{\cdot l})\\
&=\Pr(N_{1\cdot}=n_{1\cdot},\cdots,N_{k\cdot}=n_{k\cdot})\Pr(N_{\cdot 1}=n_{\cdot 1},\cdots,N_{\cdot l}=n_{\cdot l})
\end{aligned}
$$

(3.3) の両辺を比較することにより, $(N_{1\cdot},\cdots,N_{k\cdot})$ は多項分布となる. これより,

定理 3. $(N_{1\cdot},\cdots,N_{k\cdot})$ と $(N_{\cdot 1},\cdots,N_{\cdot l})$ は独立であり, 前者は確率 $(p_{1\cdot},\cdots,p_{k\cdot})$ を持つ k 項分布である. また後者は確率 $(p_{\cdot 1},\cdots,p_{\cdot l})$ を持つ l 項分布である.
フィッシャーの直接確率計算法は $k=l=2$ の場合である. 上の結果よりそれ以外に対しても別の考察を加えることが出来るかもしれない.

*business meeting（理事会、総会）報告

（1）2007 年度(2007.1.1～2007.12.31)決算報告、2008 年度予算報告があり、承認された。
（2）2007 年度事業報告、2008 年度事業予定が報告、承認された。
（3）次の名誉会員制度が承認された。「会員 5 名以上により推薦された候補が、理事会及び総会で承認されれば名誉会員となる。」
（4）Js 投稿の取扱い、Notices from the ISMS、March 2008、の Call for SCMJ(p.22～P.25)を御覧になって下さい。

* 寄付制度の発足と基金

Bylaws2007(July)の賛助会員制度(Contributing Member)が発足することになっています。それで、御寄付頂いた方の御指示に従い、各基金による事業の推進を致します。一口 1 万円より何口でも、また一口未満の御寄付も有難くお受け致しております。

右記の郵便振替口座にてお受け致します。　00960-3-206607　国際数理科学協会

基金の使途について下記よりお選び下さい。
(I) ISMS 授賞基金
ISMS 賞、功力賞、北川賞についての授賞メダルの作製、受賞者への送付の費用等授賞に関する費用に支出

(II)国際研究交流基金
海外及び国内の研究集会参加 site の会場費、研究交流設備の使用料の支出
(Ⅲ)Notices(article)、SCMJ(Plaza)等への Invited Authors に対する通信費
(Ⅳ)ISMS 国際研究集会での Keynote Speaker の、出席 site までの交通費
(Ｖ)使途に指定はしない
猶、御寄付の種類は、御寄付の累計額が
(1)50 万円(又は$5000)以上
(2)10 万円(又は$1000)以上
(3)5 万円(又は$500)以上
(4)1 万円(又は$100)以上
(5)1 万円(又は$100)未満
の 5 種類とし、感謝状を贈呈すると共に御氏名を(匿名希望の方は除き)www.及び会報、Notices 欄に掲載させて頂きます。

＊御寄付の報告

国際数理科学協会　数理科学推進基金に御寄付頂いた先生方に厚く御礼申し上げます。

2007年　石原　忠重　先生・・・・・・・・・・・・・・・・¥500,000
　　　　竹之内　脩　先生・・・・・・・・・・・・・・・・・ ¥7,000
　　　　匿名希望の先生・・・・・・・・・・・・・・・・・ ¥5,000

2008年　石原　忠重　先生・・・・・・・・・・・・・・・・ ¥500,000
　　　　佐藤　俊輔　先生、佐藤　優子　先生・・・・・¥300,000

頂いた御寄付は
(1) 新しい prize（北川賞、功力賞、国際数理科学協会賞等）のメダルの作成費
(2) 阪大中之島センターにおける海外研究者との研究交流の部屋の使用料
その他
(3)御寄付頂いた方の指定された使途
に使わせて頂きます。

＊ IVMS 国際研究集会のテスト

内外研究集会の活発化の為の Infrastructure の整備に目鼻がついてきています。
(1) 国内は参集会場に旅費、ホテル代等なしに、参画できる soba system を使う
(2) 海外会場とは阪大中ノ島センターの｢ITU の国際規格を満たす system(Tandberg 6000 使用)を使う。
(3) 内外両者を阪大中ノ島センターで接続する。

上の(1)に書きました soba system の使用説明を会報 51 号に掲載しましたが、印刷が不鮮明のため少し詳しいカラー印刷の説明文があります。Symposium や joint meeting を企画される各位に、又ご希望の方に soft をお送りします。pbls5@jams.jp 宛ご連絡下さい。

以上の中で、(1)及び(2)のテストはうまく作動しました。(3)のテストはこれからですが、成功が充分見込まれています。
猶、(2)項の、海外大学、研究所、学術団体、研究集会等との研究交流のテストをされたい方は、交流先のIPアドレスをつけて事務局にお知らせ頂ければ(scm4j@jams.jp) 、先方との接続テストをさせて頂きます。

IVMS 委員会

＊ 2008 年年会のお知らせ

国際数理科学協会年会を下記の日程，場所で行われます。
日程：平成２０年８月１２日（火）
場所：大阪府立大学学術交流会館

SOBA を用いた遠隔研究集会を希望される場合には事前にご連絡ください.
連絡先：栗木進二
大阪府立大学大学院工学研究科数理工学分野
599-8531　堺市中区学園町１－１
Tel 072(254)9356（ダイヤルイン）
Fax 072(254)9916
E-mail : kuriki@ms.osakafu-u.ac.jp
詳細は３月の会報を御覧下さい。

＊ Page Charge の大幅減額のお知らせ

今年一月より page chrge の改定がありました。**それは従来のものと大きく異なるものです。端的に言うと大幅な discout です。**従来の様に名称として page charge を用いてますが、**それは組版代及び別刷代（20 部）であり、特段投稿料というものではありません。**猶従来の様に、審査は早く、掲載には時間を取らない協会の雑誌"Scientiae Mathematicae Japonicae"に是非投稿を御願いします。会員の方で御存知ない方もおられると思います。そこで、ここでその違いをお知らせします。
従来の page charge per printed page は下表の通りです。

	ISMS　members	Non-members
Paper:P	¥3,850 (US$35, €28)	¥4,450(US$43, €35)
Tex:T	¥2,200 (US$18, €14)	¥2,800(US$26 €21)
ISMS style: Js	¥1,100 (US$8, €7)	¥1,700 (US$16 €14)

この度改定した新 page charge　の表は下です。猶、論文が掲載される事が決まりましたら、連絡費、抜刷送料の事務処理として、一編について¥1,000 及び組版に次を請求させて頂きます。下の表を御覧になるとお解かりのように、投稿原稿の種類により随分と費用が異なりますので、出来れば協会指定の Js (ISMS style file) で投稿を御願い致します。**また、会員になると更に discout があります。**

これを機会に皆様方の更なる投稿をお待ちしております。

	ISMS members	Non-members
p	¥ 3,500 (US$35, € 23)	¥ 4,000 (US$40, €27)
Tex	¥ 2,000 (US$20, € 14)	¥ 2,500 (US$25, €17)
LateX2e, LaTeX	¥　700 (US$ 7, €　4)	¥ 1,000 (US$10, € 7)
Js (ISMS style file)	¥　500 (US$ 5, €　3)	¥　800 (US$ 8, € 5)

＊　機関会員募集

機関会員の特典としては
(1)本屋より SCMJ を購入すると、print 版 45,000 円であるが、機関会員になると、print 版 33,000 円で **online も見ることができます。**
(2)会員でない 2 名の方を準会員として登録することができます。これにより、page charge（別刷代金）が会員と同じ扱いになります。
(3)上の準会員 2 名は online で SCMJ を見る事ができます。
(4) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。大学、研究所等が協会から SCMJ 誌の直接購入すると、今年から online も無料で見ることができるようになりました。
機関会員の申込用紙です。適当にお使い下さい。

Application for Academic and Institutional Member of ISMS

Subscription of SCMJ	□Print ＋ Online (¥33,000,　US$300)
University (Institution)	
Department	
Postal Address where SCMJ should be sent.	
E-mail address	
Person in charge	Name: Signature:
Payment Check one of the two.	□Bank transfer　　□Credit Card (Visa, Master)
Name of Associate Members	1.
	2.

上にも書きましたように、2006 年より発効の機関会員制度により各機関会員に所属の研究者 2 名を会費無料で準会員として登録しますと、準会員が SCMJ に accept された論文を掲載するときの page charge（別刷代金）は会員と同額とすることにしました。

この新しい制度の機関会員の P.R.を、日本国内外（BRICS 諸国など）400 大学に向けて、昨年 1 月から始めています。同時に今迄の SCMJ 投稿者で会員でない方、また、個人会員および（機関会員の）準会員加入の P.R.も始めています。

両者の P.R.について会員の御支援（P.R 先大学の教員の方の名前ご連絡頂く）を御願いする次第です。

＊　正会員入会申込用紙

個人会員の特典としては

(1) online で SCMJ を見ることができます。

(2) 論文の掲載時に page charge(別刷代金)が随分と安くなる。

(3) Net を用いて国際研究集会を催す時、アナウンス、アブストラクトの作成などお助けいたします。6,000 円を支払うと、hard-copy の SCMJ が一年を通じて手に入ります。

(4) 10 年間個人会員を続けると、国内会員は 70,000 円、外国会員は US$600、途上会員は US$500 を支払うと生涯会員となれます。

2008 年度からの会費

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US$75,　€60	US$45, €36
3 年 A 会員	¥24,000	US$200,　€160	US$117, €93
単年度 S 会員	¥5,000	US$40,　€32	US$27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US$100,　€80	US$71, €57
生涯会員	¥90,000	US$740,　€592	US$616, €493

日本語が出来る方の入会の申込用紙です。また、英語版も書いて頂くことになります。近く net 上で申し込み可能となるようにしますので、入会しようとする方はそれをご利用下さい。

正会員入会申込書

<table>
<tr><td>氏名</td><td colspan="2"></td><td>英語名</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6">次の２つのうち会報等を送付先とする方に○を付けてお書き下さい。</td></tr>
<tr><td>所属先
住所</td><td colspan="5">〒</td></tr>
<tr><td>住所</td><td colspan="5">〒</td></tr>
<tr><td>専門分野</td><td colspan="5">表 f *より選んで○で囲って下さい
f-1, f-2, f-3, f-4, f-5, f-6, f-7, f-8, f-9, f-10, f-11, f-12, f-13, f-14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">E-mail
address</td><td rowspan="2" colspan="2"></td><td>電話番号</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Fax 番号</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>会員区分
該当部分にチェック</td><td colspan="5">□A1 一般 1 年　□ A3 一般 3 年　□ S-A1 高齢者又は学生 1 年
□　S-A3 高齢者又は学生 3 年　□ 生涯会員</td></tr>
<tr><td>所属先の
施設</td><td colspan="5">□ ビデオ会議可能　□ 遠隔会議可能　□ コンピューターセンター</td></tr>
<tr><td>所属先の
通信システム</td><td colspan="5">□　ISDN　□ IP</td></tr>
<tr><td>所属大学等が
機関会員</td><td colspan="5">□　会員である　□　会員でない</td></tr>
<tr><td colspan="6">SCMJ のプリント版の購入</td></tr>
<tr><td colspan="3">□　希望　1 年に付き
１年会員 6,000 円、3 年会員 5,500 円**</td><td colspan="3">□ 希望しない</td></tr>
<tr><td>高齢会員を申し込む場合</td><td colspan="2">生年月日</td><td colspan="3">学生会員の場合は在学証を添付</td></tr>
<tr><td>日付</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="3">私は ISMS 会員になり､国際数理科学協会に送り状に記載された年会費を払います。ISMS 会員として受け取った Scientiae Mathematicae Japonicae のコピーは個人使用とし、機関、大学または図書館やその他の組織の中に置かず、閲覧目的で会員購読することもしません。</td><td>署名</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。

**ただし、３年間一括の場合は 15,000 円です。なお、来年より会費の改定を計画しております。

この申込みの内容は会との連絡以外には使用いたしません。

Application form for an individual member of ISMS

Family Name		First &Middle Name	

Check one of the following addresses to which "Notices from the ISMS" should be sent.	
Address of your institution (university)	□
Home address	□
Special fields*	f-1 f-2 f-3 f-4 f-5 f-6 f-7 f-8 f-9 f-10 f-11 f-12 f-13 f-14

E-mail address		Tel.	
		Fax	

Membership category** (Circle one)	A1, A3, SA1, SA3, F1, F3, SF1, SF3, D1, D3, SD1, SD3, AL, FL, DL
Check the facilities your institution has.	☐ Conference room(s) for video conference ☐ Computer center
Communication system of your institution	□ ISDN □ IP
Is your institution (university) an Institutional Member of ISMS?	□ Yes □ No
☐ I subscribe to the printed version of SCMJ.	□¥6,000 (US$60, €48) per year for those members of A1, SA1, F1, and SF1 , D1 and SD1. □¥5,500 (US$55. €44) per year for those members of A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, and DL. □In case A3, SA3, F3, SF3, D3, SD3, AL, FL, or DL members make the payment at a time in advance, the price for 3 years is ¥15,000 (US$150, €120).

For the aged member, write your birth year.		For the student member, student registration certificate should be attached.
Date of Application		

I wish to enroll as a member of ISMS and will pay to International Society for Mathematical Sciences the annual dues upon presentation of an invoice. Copies of Scientiae Mathematicae Japonicae received as an ISMS member will be for my personal use only and shall not be placed in institutional, university or other libraries or organizations, nor can membership subscriptions be used for library purposes.	
Signature	

* Notices from the ISMS March 2008 p.25 を御参照下さい。

**Notices from the ISMS March 2008 p.28 を御参照下さい。

ISMS (JAMS の継続) 会員募集

ISMS の出版物：ISMS は、創刊より約 60 年、国際的に高い評価を得ている Mathematica Japonica (M.J.)と、その姉妹誌で電子 Journal と Paper 誌とを持つ、Scientiae Mathematicae (SCM) とを発行してきました。両誌は合併して、“21 世紀 MJ/SCM New Series, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) ”として、電子版は 2000 年 9 月より発行してきました。印刷版は、1978 年 1 月より、年間 6 冊、700～1200 頁を出版しています。全体として 230 巻を超える、日本で最大量を誇る数理科学の雑誌です。その特長は、下の 1)～７)です。

1) Editorial Board には、国内だけでなく、海外 15 カ国の著名な研究者 40 名が参加している。
2) 世界の research group に論文が紹介され、積極的な交流が推進されている。
3) Editor を窓口として直接論文を投稿できて、迅速な referee 及び出版が得られる。
4) 有名な数理科学者の original paper や、研究に役立つ survey が、毎号載せられている。
5) SCMJ は、世界の有名数理科学者による、極めて興味ある expository paper を、毎号 International Plaza 欄に掲載している。世界各国の図書館へ、広く配布されている。
6) 投稿論文は、accept 後 (又は組版後) 待ち時間０で発行されます。
7) Mathematical Review, Zentralblatt に from cover to cover で review されている。

ISMS の研究集会：(1)研究仲間がゆっくり時間をかけて発表、討論をする、特色ある参集型研究集会が毎年行われ、非会員も含む多数の参加者の、活発な研究交流の場となっている。(2)ISMS には内外の著名な研究者が多数入っておられる。近いうちに内外を結ぶ高い level の研究会が online で行われる事を期待している。（本誌 45 号 3p 及び Notices March 2006 9p を御参照下さい）

ISMS の学術賞：会員の優れた論文を広く世界に紹介し、更なる研究を奨励するために、ISMS 賞、JAMS 賞、Shimizu 賞、Kunugui 賞、Kitagawa 賞を設けている。（詳しくは本誌 45 号 2p 会則 13 条を御参照下さい）

＜ISMS の会員の特典＞１．SCMJ 電子版の購読 (print out も含む) 無料。２．SCMJ print 版の少額での購読 (下表１)。３．Page charge(別刷代金)の discount (下表２)。

＜機関購読会員の特典＞1. 機関内の 2 名の方を準会員として会費無料で登録することが出来る。２．準会員は会員と同じ page charge(別刷代金)の discount を受けることが出来る。

表１
【雑誌購読費】

	正会員（1 年）	正会員（3 年）	機関会員	定価
Print	￥6,000 US$ 60, €48	￥5,500* US$ 55, €44	￥33,000 US$ 300, €240	￥45,000 US$ 400, €320
Online	Free	Free		
Online+print	￥6,000 US$ 60, €48	￥5,500 US$ 55, €44	￥33,000 US$ 300, €240	￥45,000 US$ 400, €320

*３年会員のみ、雑誌購読費 3 年分前払いの場合は￥15,000 になります。
著者の方には、SCMJ を１冊送料込みで 1,200 円または US＄12 で購入できます。

表２
【ページチャージ】

	ISMS members	Non-members
p	￥3,500 (US$35, € 23)	￥4,000 (US$40, €27)
Tex	￥2,000 (US$20, € 14)	￥2,500 (US$25, €17)
LateX2e, LaTeX	￥ 700 (US$ 7, € 4)	￥1,000 (US$10, € 7)
Js (ISMS style file)	￥ 500 (US$ 5, € 3)	￥ 800 (US$ 8, € 5)

別刷作成について、次の費用の分担をお願いします。原稿の組版についての連絡費、抜刷送料等の事務処理として、一編について¥ 1,000、及び上表の各原稿の種類による組版費を請求させて頂きます。
（2008 年 Vol.67 から実施）

表３
【2008 年の会費】

Categories	国内会員	海外会員	途上国会員
単年度 A 会員	¥9,000	US$ 75, €60	US$ 45 , €36
3 年 A 会員	¥24,000	US$ 200, €160	US$ 117, €93
単年度 S 会員	¥5,000	US$ 40, €32	US$ 27, €21
3 年 S 会員	¥12,000	US$ 100, €80	US$ 71, €57
生涯会員**	¥90,000	US$ 740, €592	US$ 616, €493

**過去 10 年以上、正会員であった方に限る。
A 会員は正会員を指し、S 会員は、学生会員と高齢会員(70 歳以上)を指します。

国際数理科学協会
International Society for Mathematical Sciences
〒590-0075 堺市堺区南花田口町 2-1-18 新堺東ビル内
Tel：(072)222-1850 / Fax：(072) 222-7987 URL：http://www.jams.or.jp