



一般社団法人

国際数理科学協会会報

No.101/2017.1

編集委員：藤井淳一（委員長）

目次

* 寄稿

* 寄稿

Maxwell 分布の視点からの時間概念と熱力学の関係性 (Relationship between the time concept and thermodynamics from a viewpoint of the Maxwellian distribution)

明星 稔 (Minoru Myojo ; 無所属)

1 はじめに

I. Prigogine (プリゴジン) が概念を提出した熱力学時間 (エントロピー時間とも呼称) について、著者の前報『ゼノンのパラドックスと熱力学 (Zeno's paradoxes and thermodynamics)』は、その数値・定義化を試みた¹[1]。また、熱力学第2法則 (エントロピー増大則) に代表されるように、時間の非対称性や不可逆性を表す言葉としての「時間の矢 (Arrow of time)」といった時間表現がある一方、(量子力学理論が展開され既に成功を収めた現在にあって、改めての議論の蒸し返しは不要ながら) 熱力学第2法則を分子論・確率論的に解説した Boltzmann の H 定理に否定的見解を与える J. Loschmidt の逆行性批判 (分子運動に見られる微視的可逆性から巨視的現象の不可逆性がどのように説明できるのかといった問題提起) がかつてあった。

それに対して著者は一貫して、「熱力学は全微分数学操作を多用するから、その視点を踏まえれば、全微分成立条件を守るか否かに依存してマイクロ世界 (守る) とマクロ世界 (守らない) の識別が可能となり、その識別はマクロ世界における“熱力学時間を最小単位とする時間概念の創出”と“不可逆的現象の発現”にとって不可欠である」との立場をとった²。ただし、ここでの「マイクロ世界 (守る)」とは物理学的操作よりかは“数学操作に依存した準静的過程”が機能する世界<極限的な超マイクロ世界>³のことを指し、Loschmidt が考察の対象にした「分子運動論的なマイクロ世界」のこととは大いに異なる。本報は、その点に焦点を当てて「マクロ・マイクロ世界 (守らない)」における“時間の矢”の正当性を解説する。それは、援用的に Maxwell 分布の解説から始まる。

¹第2報 Eq. 12 で表した熱力学時間 t_{td} は任意の時間 (1s) を含む [1] が、Avogadro 数 N_A を単位時間当たりの巨視的粒子数変化割合 $N_A[\text{s}^{-1}]$ に置換すれば、それは一意的となる。その変化割合の扱いは Planck 時間における光速 $[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$ と同様である。

²エントロピーには、準静的過程を辿った“可逆的でサイクル収支がゼロとなる”補償的エントロピー $dS(= \delta q_{\text{rev}}/T)$ と、準静的過程を逸脱して熱伝導源 $\Delta(pV)$ (熱源を生じさせたその場所での熱伝導率 $[\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$ は時間概念を有する) を生じさせる非補償的エントロピー $\Delta S(= \Delta(pV)/T)$ の2種類があること、および熱力学第2法則 (エントロピー増大則) に関係した後者の非補償的エントロピー ΔS が生じる瞬間に熱力学時間を超えてマクロ世界での“時間の矢”概念が顕在化することを、第1報と第2報を合わせた記述は明示している。

³超マイクロ世界といっても、それは量子世界より大きい。光や素粒子を扱う量子世界はもっと極微である。

2 Maxwellの速度分布則

Maxwell分布の基本形〔 $M(v)$:速度分布関数〕は、次のように示される。

$$M(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (1)$$

この式の導出方法の1つを以下のように記すことを通じて、物理学分野における「微視的可逆性」「時間反転」「時間対称性」あるいは「時間の熱力学的非対称性」といった各種表現の解釈に対する著者の考え方を記す。

対象とする系（システム）が N 個の分子（粒子）で構成されているとし、その中の1つの粒子に注目する。その粒子の x 軸成分の速度が v_x 近傍（ $v_x \sim v_x + dv_x$ の間）にある確率 P は、 $f(v_x)$ を確率線密度において

$$P = f(v_x)dv_x \quad (2)$$

と表せる。 P は確率だから、 v_x をマイナス無限大からプラス無限大まで $f(v_x)$ を積分すれば1になる約束：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x)dv_x = 1 \quad (3)$$

に従って、 N 個の粒子の内の、 x 軸成分速度が $v_x \sim v_x + dv_x$ の間にある粒子の数は、

$$Nf(v_x)dv_x \quad (4)$$

と表せる。

ある粒子の、他軸成分を含めた速度が $(v_x, v_y, v_z) \sim (v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$ の間で見つかるときの確率が

$$P = f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_xdv_ydv_z \quad (5)$$

と与えられると想定する。それは、以下に記す3つの関係式：

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (6)$$

$$P = F(v)dv_xdv_ydv_z \quad (7)$$

$$F(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) \quad (8)$$

も同時に想定され、与えられる。 $F(v)$ は粒子の存在確率密度である。

もし v_y も v_z も 0 ならば、速度の大きさ v は $v = |v_x|$ と与えられる。そして、 $f(0)$ をゼロでない定数 a [$f(0) = a (> 0)$] とおくことにより、関係式：

$$F(v) = a^2 f(v_x) \quad (9)$$

が成立する。これは、数学的境界条件を定める過程で生じた関係式である。もし $f(0)$ がゼロ [$f(0) = a = 0$] ならば、 $F(v)$ もゼロ [$F(v) = 0$] になってしまうが、その表現は特別な事情の場合だけに限定される⁴。ところで、Eq. 8 の表現は“Maxwellの仮定（各軸の衝突形式は同等）”に基づいていて

$$F(v) = f(v_x)g(v_y)h(v_z), \quad \text{ただし} \quad f(0) \neq g(0) \neq h(0)$$

とは決して表現されない。それは、彼の主張の本質を問う要点となる。

⁴ p - V 線図で原点 $(V, p) = (0, 0)$ 近くの動作点は、粒子数 $(N \rightarrow 0)$ とともにエネルギー概念を生じ難くして $(pV \rightarrow 0)$ “特殊な状態”にある。そのとき、確率線密度定数 a は不定で、 $a = 0 (a \rightarrow 0)$ となる可能性を含む。すなわち、定まった値の a 値 ($a > 0$) は、ある程度の大きさの粒子数 $(N \gg 0)$ と pV 値あるいは温度概念 T の成立に依拠した有限のエネルギーの存在を主張している。逆に、有限のエネルギー存在下にあつては、粒子の速度3成分のいずれの場合も $a > 0$ でなければならない。粒子数が数個 ($N = 5-6$) だけの系では、ミクロ的挙動の“準静的過程の一部”を記述する場合を除き、 p - V 線図の中に巨視的な意味合いの状態量を表現することはできない [4]。

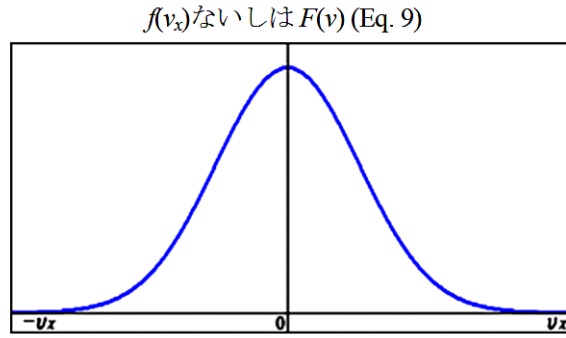


Fig. 1 Normal distribution incorporated in the Maxwellian distribution [2].

ここで、 $f(v_x)$ を

$$f(v_x) = ae^{-bv_x^2} \quad (10)$$

とおけば⁵、 $v_x = 0$ で $f(0) = a$ を得て、 v_x は v_y, v_z と平等の扱いを受けるとともに、 $f(v_x)$ の分布は正規分布〔別称、ガウス分布 (Gaussian distribution)〕と同じ確率密度関数の形式をとることになる (Fig. 1 参照)。

Fig. 1 に表す Eq. 10 の分布は、Eq. 9 を介して“特殊条件下の確率密度 $F(v)$ ”の形をも表現している [2]。数学的境界条件に関係したこの分布は、通常は立体的に表される速度空間 (後述) を 1 軸直線内に折り畳んでいて、 x 軸だけで表現される。この場合、 x 軸はプラス・マイナス 2 方向に延びていて、 $v_x = 0$ で最大値 $f(0) = a$ を有する釣鐘型のガウス分布は、速度のマイナス成分を有するから一見して「時間対称性」を表現しているように思える。しかしながら、それは 1 軸内でゆらぎを含めて“確率振動”的に正・負両方向の粒子速度点存在確率が表現されているに過ぎず、そうした量子論に似た視点に配慮するならば、時間は一方向に流れていると考えるべきである (“確率振動”なる表現の詳細は後述)⁶。すなわち、マクロ定常状態を表す Maxwell 分布の中、視点をかなり奥深くミクロ領域にまで踏み入れたとしても“時間反転対称性と呼称される操作特性”の考え方を除けば、著者が前報で指摘したように数学操作領域にまで時間分割が進まない限り、同分布の中で実際に「時間概念を離れた可逆操作」が見出されることはない [1]。

Eq. 10 の定数項 a を、Eq. 3 に代わる 3 軸成分規格化条件と全エネルギー計算、および数学公式⁷を用いて

$$a = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

と想定すれば、Eq. 10 指数項の b も同時に定まり ($b = m/2kT$)、結局のところ Eq. 10 は

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \quad (10')$$

⁵Eq. 10 は単なる仮定ではない。3 軸速度成分の“Eq. 6 における和と Eq. 8 における積の関係”および“定数 a の設定条件”の全てを、Eq. 10 は満足している。

⁶“速度 $d\mathbf{l}/dt = \mathbf{v}$ の $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ ”となる理由が<時間反転操作 $t \rightarrow -t$ >に依存し、その操作結果が物理法則を守り物理事象として自然に映る場合のことを時間反転対称性と呼ぶ。それはよく“映画フィルムの逆回し”や“ビデオテープの逆回し”に例えて説明される。この時間反転操作による“速度 $d\mathbf{l}/dt = \mathbf{v}$ の $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ ”がマクロ世界で<空間反転 $l \rightarrow -l$ >に影響していない根拠は、逆回し映像の中のいわゆる静止ポイント (複数) が相互に反転していない事実から了解される。(鏡の中の逆回し映像ではないので、それは極めて当然なことである。本報は素粒子世界には踏み込まないので、対称性の破れを議論する目的の“鏡の中”には立ち入らない。)そして、逆回し映像の中の動作ポイントに注目すれば、マクロ的に不自然に映る事例 (人の後ろ歩きなど) と第 3 章で紹介するミクロ世界にて自然に映る事例の 2 要素に、識別が成る。このとき、ミクロ世界における<空間反転 $l \rightarrow -l$ >に関する議論の必要是非が課題として浮上する。その折には代替案として、1 軸 (正・負) 両方向の確率的・統計的振動の考え方に対して、<時間反転 $t \rightarrow -t$ >とは無縁の“単に確率振動的な中心極限を有する<空間反転 $l \rightarrow -l$ >に従っているだけ”との解釈が新たに加わる。本報第 4 章によると、現代物理学が時間反転対称性と呼ぶ事例の中にも、「“時間の矢”のとおり普通に時間は流れている」と考えた方が合理的な場合がある。

⁷ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$

と、Boltzmann 分布に似た表式（確率表現）で表されることとなる [3]。この想定をもとに「脚注 4」を参照すれば、粒子の存在（質量 m ）と、ある程度の粒子数に基づいた温度概念 T の成立を見るからこそ、エネルギー概念の存在を前提にした Eq. 11 の定数 a と、それを含む Eq. 10' が現出したと言える。

上述したこと、および Maxwell の速度分布則概念が粒子速度点の存在に関して量子論一歩手前でビジュアル的な確率表現を顕わにしていることについて、以下に解説する。

定数 a が $f(0) = a$ と表されるということは、粒子速度点の存在確率線密度を表す関数 $f(v_x)$ のディメンションは定数 a のそれに従っていると考えてよい。この定数 a をより正確に記述するならば次式：

$$\lim_{\pm v_x \rightarrow 0} f(v_x) = a \quad (12)$$

が立ち、これにより定数値 a は極限上の数値表現となることが分かる⁸。そして、エネルギー概念の存在（定数値 a の極限的存在）を前提に系内でエネルギー分布する粒子速度点の存在確率線密度は、Eq. 10' に従って極限定数 a よりも小さくなる（Fig. 2 参照）。

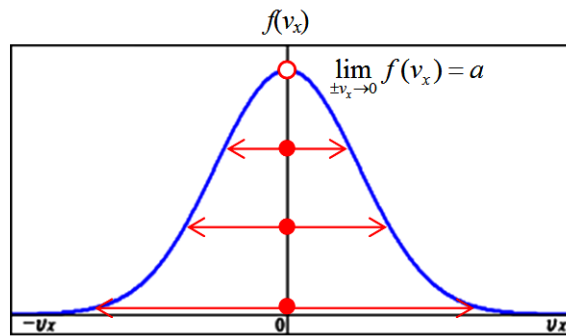


Fig. 2 Normal distribution with respect to the oscillated velocity plots.

Fig. 2 を見ながら、Maxwell が当時に量子論的記述を果たせなかった上述内容の、その考えに沿った再記述をここに試みる。エネルギー概念の存在を前提とした極限定数 a は、他の 2 軸と同様に x 軸成分の粒子速度も完全に中心点に固定されようとしていて（Eq. 12 参照）、速度停止状態（ $v_x = 0$ ）の粒子 x 成分の存在確率は 100% であるから、定数 a そのままの粒子速度点存在確率線密度密（ x 軸成分）が与えられる。ただし、この x 軸成分の速度停止状態は中心極限的（ $\pm v_x \rightarrow 0$ ）である。同一系（システム）内で分布する“あるエネルギー状態”（正・負 1 軸 2 方向に偏在する粒子速度点の振動状態）に注目するとき、その条件で存在可能とされる粒子速度点の不確実性が増す結果、そのときの確率線密度は a 値より小さくなる。「古典粒子に対して量子論を適用？」と疑問視する声も聞こえてきそうである⁹が、その詳細は第 4 章に譲る。線密度から空間密度への変換、すなわち $f(0) = a$ から $F(0) = a^3$ への変換についても

$$\lim_{v \rightarrow 0} F(v) = a^3$$

のように、極限値的な表現が要求される。しかしながら、この値 $F(v)$ は Maxwell 分布（Eq. 1）に従って $v \rightarrow 0$ でゼロに変容する（ $F(v)$ から $M(v) \rightarrow 0$ ）ことになる。

以下にその点を解説する。“Maxwell の仮定”に基づけば、3 軸方向の各速度点の分布（Eq. 10' 参照）は互いに独立に Eq. 8 が成り立つので、“方向を指定しない速さ（大きさ v ）の粒子速度点存在確率”は、

$$F(v)dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z \quad (13)$$

⁸エネルギーが存在する前提と 3 軸成分の速度ゼロの組み合わせ表現は、極限的記述（ $v_x \rightarrow 0$ など）によってのみ可能となる。この考え方は中心極限定理に従い、Gauss がグリニッジ天文台の天文観測データを用いてその誤差分布（確率分布）を表現する正規分布の式を発見したことに由来する [8]。

⁹古典的粒子でありながら量子論的考察が要求される場面は、配座数をカウントするといった微視的考察を行う際によく知られている。それと同様の場面が粒子減数下でエントロピー評価を行う際にも認められた [4][5]。

のように表される。そして、微小体積部分の読み直し $[dv_x dv_y dv_z \rightarrow 4\pi v^2 dv$ (球殻)] を伴った“直交座標から極座標への変換 (Fig. 3 参照)”により、Maxwell 速度分布関数 $M(v)$ は得られる (Fig. 4 参照)。

$$M(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \quad (1')$$

$$M(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (1)$$

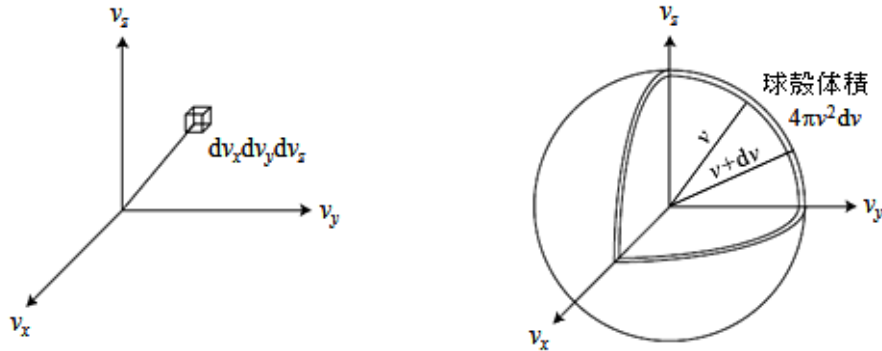


Fig. 3 Cartesian coordinate system and polar coordinate system (velocity space).

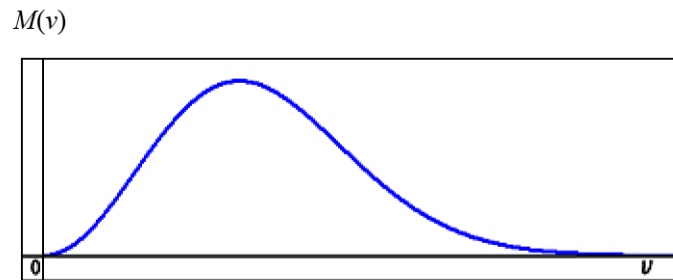


Fig. 4 Maxwellian velocity distribution [2].

ここで注意すべき点は、 $F(v)dv_x dv_y dv_z$ (Eq. 13) と $M(v)dv$ (Eq. 1') とは全く同じ「方向を指定しない速さ (大きさ v) 粒子速度点存在確率」を表現していても、関数表現としての $F(v)$ と $M(v)$ とは意味する内容が全く異なっているということである。それは、関数 $M(v)$ (Eq. 1) の構造：

$$M(v) = M_1(v) \cdot M_2(v) = v^2 \cdot 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

に現れていて、 $M_1(v) = v^2$ ($v > 0$) の特性が Maxwell 分布の根幹形状 (Fig. 4) を決定づけていると言える¹⁰。Maxwell 分布 (Eq. 1) の基本形は、速度空間の動径 v を強く反映させた $M_1(v) = v^2$ が ($M_2(v)$ 内の定数 $F(0) = a^3$ とともに) その骨格を形成し、 $M_2(v)$ 内の指数項が Boltzmann 因子よろしく確率表現 (無次元；エネルギーを高めるほどに「対象」の存在比率は下がる) を機能させその骨格を修飾していると言える (Fig. 4)。

¹⁰ $M_1(v) = v^2$ の速度の大きさ v は、動径 v (Eq. 6) の速度空間 (> 0) の中であって、Fig. 4 に示すように v のうちのマイナス成分の存在は認められない。極限定数 a 周辺の正規分布に由来する量子論的視点 (本論) は、“時間の非対称性”を主張することとなって、分子衝突レベルのマイクロ世界にあってもマクロ世界と同様に、“時間の矢”に従った時間の流れを支持している。

本章で認識すべき重要な視点は、Fig. 1（あるいは Fig. 2）と Fig. 4 の分布形式の違いが一見して“時間の対称性と非対称性の違い”に依拠しているように見えて、実はどちらも「時間の非対称性（“時間の矢”の概念）」を支持していることが了解された点である。Fig. 2 を元にした粒子速度点の存在を確率的ないしは量子論的に表現する考え方は、時間の流れを一方向に見定める考え方と整合している（第4章および補遺に詳述）。

3 Boltzmann のエルゴード仮説と時間概念

以上のように表現された Maxwell 分布の、時間概念について考える。まず、閉鎖系における多数の粒子による Maxwell 分布 (Fig. 4) は、Eq. 1 に従って Fig. 5(a) のように表される。このように視覚に訴えたときの図示は、Maxwell が導入した分子的混沌 (molecular chaos) の概念 (衝突回数の計算に関する簡単な仮定) に従って、

- ・ 同じ速度空間内で多くの粒子が衝突し合い、個々の粒子はエネルギーを交換しながら系全体で一定の速度分布を維持し (粒子のマイクロ視点から系のマクロ視点への転化が進み)、
- ・ ある相 (phase) の粒子群速度点をシャッターチャンスよろしくカメラで切り取ったように

表現できる。それはマクロ的には定常状態にあり、「時間変化がない」という理由で、Fig. 5(c) の p - V 線図内の動作点 pV (状態量) は動かず、そこから (マクロ視点の) 時間概念が生まれる余地はない。

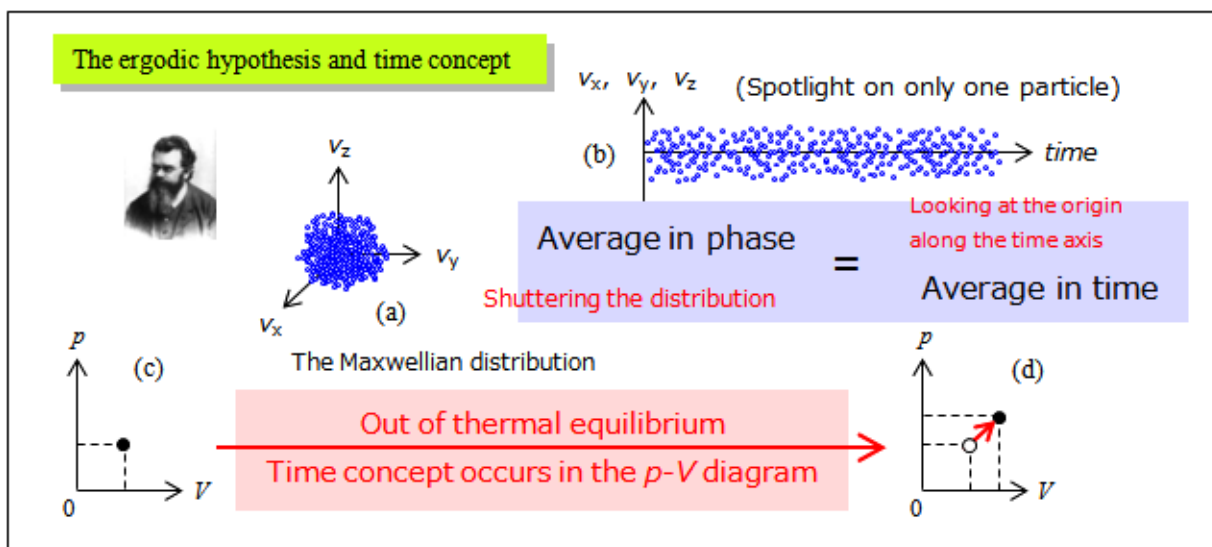


Fig. 5 The ergodic hypothesis and the time concept [5].

一方、ミクロ的視点の分子的混沌を表現するために、Fig. 5(a) の Maxwell 分布を構成する多くの粒子の中の 1 粒子に注目し、その他の大多数の粒子は在るのだけれど“透明で見えない”ことと仮定した。透明で見えない多くの粒子はそれぞれに、注目する 1 粒子を含む他の粒子と衝突し合うから、Fig. 5(b) に示したように、注目する 1 粒子の速度成分は空間内の 3 軸方向ごとに時間を追って変化することになる。

その“1 粒子の速度時間変化”を 3 軸方向ごとにプロットした速度点について、Fig. 5(b) の時間軸に沿って順行時間方向と逆行時間方向から速度点プロットの変化とそれを集積させたそれぞれの 2 軸面分布を比較するとき、歩行者の順行と逆行といったマクロ視点の明らかな違いとは異なり、その両者の違いを見つけることは難しい。それは、既存物理学が「時間の反転対称性」について解説する一表現に近い。

また、1 粒子による多数の (3 軸成分) 速度点を Fig. 5(b) 時間軸に沿っていずれか一方から眺めるとき、その様子の 3 軸立体分布は Fig. 5(a) の Maxwell 分布を再現していないか? この考え方は、Boltzmann によるエルゴード仮説 (ergodic hypothesis) を完全にフォローアップしているとは言えないまでも、その立証を目的とした理論:

ある物理量に対して、“長時間平均”と“ある不変測度による位相平均”が等しい

に、かなりのところ肉薄したモデルを提供できたと言えるのではなかろうか。このエルゴード理論をフォローアップする考え方は、「注目する 1 粒子」は、系を構成する他の多数粒子と頻りに衝突を繰り返してエネルギーを交換し合っているから、注目する 1 粒子が既に“1 粒子だけの特性”ではなくなって、“系全体の特性”を反映している」との表現を許容する。

本章を要約する。

1 粒子の動きを追いかける“マイクロ視点の力学” [Fig. 5(b) 参照] からは、時間反転操作を追認できる記述を見て取ることができたし、エルゴード仮説の立証理論 (あるいはその同等モデル) からは時間変化のない熱平衡的な Maxwell 分布を概観することができた。

ここで、時間変化のない熱平衡的な Maxwell 分布に対応する、別個の 2 つの動作点を同じ p - V 線図の中に認め、かつ片方からもう一方への動作点移動を考える。Fig. 5(d) に表す動作点移動が準静的過程 (熱力学的無限小の幅を有する等温線の両エッジ) 上になくはみ出すならば、その移動はマクロ視点で捉えられたことになるから、変化割合とか動作点の移動速度の記述 (速いとか遅いとかいった表現) を伴って、そこには明らかに時間概念が生じている¹¹。

4 分子衝突時間と熱力学時間

ある程度に分子 (粒子) 数を確保した系 (システム) の温度概念は、気体分子運動論より

$$(1/2)m\langle v^2 \rangle = (3/2)kT$$

と与えられるから、対象とするガス分子 [ここでは身近な空気分子の一成分である窒素分子 (粒子重量 $m = 0.028\text{kg}/6.02 \times 10^{23}$)] とそのガス温度 T を決めたら、そのガス分子の根 2 乗平均速度は

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3p}{mn}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

と与えられる (同算出は、ガス温度 T と分子量 m の関係を系のガス圧力 p とガス密度 ρ の関係に置き換えても良い) [3]。ガス温度を常温 25°C に設定すれば、窒素分子の根 2 乗平均速度は $v_{\text{rms}} = 515\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ となる。ここで圧力情報 p を同時に入手できれば分子数密度 n が分かるから、窒素分子の直径を 3.7\AA ($2r = 3.7 \times 10^{-10}\text{m}$ 、その断面積は $\sigma = 4\pi r^2$) として、平均自由行程 λ は

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2}p\sigma} = \frac{0.68}{p(\text{Pa})}(\text{cm}) \sim 640 \times 10^{-10}\text{m} \quad (\text{常温} \cdot \text{常圧})$$

と与えられる。ここで「常温 25°C ・常圧 1atm 」は、我々に身近な条件として選択された。

この平均自由行程 λ と根 2 乗平均速度 v_{rms} の関係 (λ/v) より、平均自由時間 τ :

$$\tau = 1.24 \times 10^{-10}\text{s} \quad (\text{常温} \cdot \text{常圧})$$

¹¹ 「 p - V 線図が扱う動作点や“熱力学という学問体系”に時間概念は含まれない」との一部有識者からの指摘は、準静的過程とかカルノーサイクルを微視的に扱わなければならない考え方の延長線上に現れた指摘ではなかろうか。無論、カルノーサイクルはそのように扱われなければならない、マイクロ視点とマクロ視点の接点を扱う第 1 報 Eq. 25 と同 Fig. 5 周辺の記述に、時間概念は無用である。ただし、一般工学分野で平衡点をずらした考察を p - V 線図上で行う場合に、(熱伝導率の単位・次元が示唆しているように) 時間概念の存在に対する注意は払われた方がよい。

が得られる。この平均自由時間 τ は、分子（粒子）相互のある衝突から次の衝突までの平均的な時間であり、実衝突時間（ $\sim 10^{-12}\text{s}$ ） [3] のことを含め、著者第2報で定義づけた熱力学時間（ $\sim 10^{-23}\text{s}$ ）¹² [1] よりも長い。「常温・常圧における衝突の平均自由時間 τ がマクロ世界で時間の最小単位となる熱力学時間よりも長い」という事実（ただし、著者作成文書のレビューを伴った理論検証は未了）を踏まえれば、微視的な衝突の繰り返しを通じて認識される「時間反転対称性」は、“マイクロ世界（守らない）”における一操作特性を表して、可逆動作が数学操作的な“準静的過程”や熱力学時間を扱った“超マイクロ世界（守る）”のものではないことになる。「マイクロ世界と超マイクロ世界」の両者表現上の識別が必要になったということである¹³。

本内容をフォローアップすることのできる各論を、以下に記す。

4.1 熱力学時間と準静的過程

熱力学時間を定義づける根拠は、第2報 [1] に従い「脚注 1, 12 および 13」に示したとおりである。 p - V 線図の存在可能性について、「その存在は粒子数の多少に関係しないか?」とか「粒子減数のどのレベルまで存在し得るか?」といった視点で考え始めるとき、本定義を結論づけるに至る論理プロセスには十分に注目に値する。この視点を、これまでの議論（ p - V 線図内における動作点のマクロ変化）と“系（システム）として熱力学が意味を成す最少の粒子数（ $N = 5-6$ ）”とを組み合わせるとき、熱力学時間（熱力学的マクロ世界における時間の最小単位）の数値・定義化が成る。

この熱力学時間と準静的過程の、切り離すことのできない両者の“関係性”について記す。“熱力学的に意味を成す最少の粒子数（ $N = 5-6$ ）”は、第1報の Fig. 7 周辺の記述 [4] に沿った第2報の Fig. 9 およびその周辺の記述に見て取れる [1]。ここにその図を Fig. 6 として再掲する。

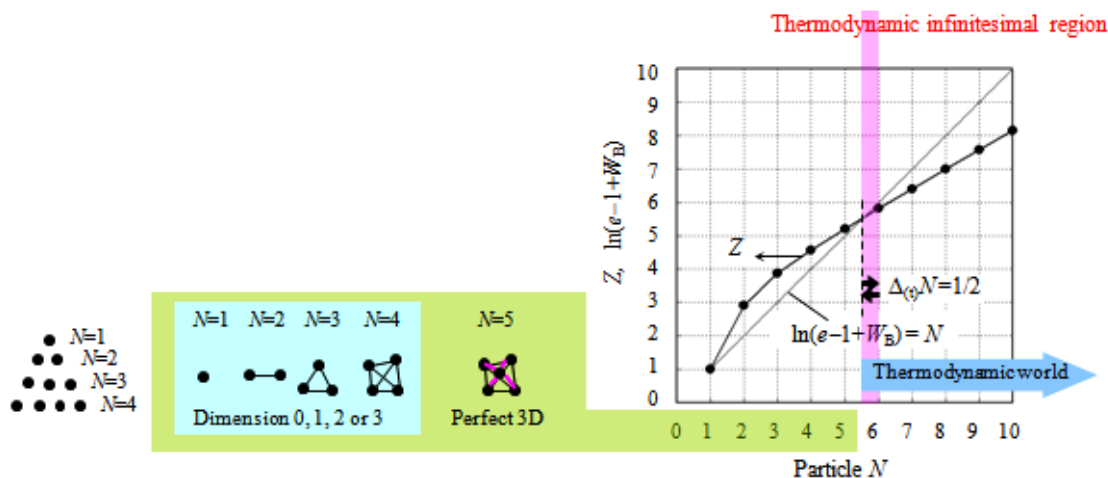


Fig. 6 A few particle numbers in a system where the thermodynamic world starts.

Fig. 6 に従うと、熱力学的無限小（数学的ではない物理学上の微分の最小単位）の理論構造は、“半粒子 $\Delta_{(t)}N = 1/2$ ” といった極めて特殊な粒子概念に依拠した基本式「 $\Delta_{(t)}S = k\Delta_{(t)}N$ （第1報 Eq. 32）」を

¹²熱力学時間（ $\sim 10^{-23}\text{s}$ ）を定義づける根拠は、「 p - V 線図の動作点のマクロ移動するとき生じた時間概念（Fig. 5(d) 参照）が、粒子減数の進んだ“ある段階”から両軸を形成する $p = p(N)$ と $V = V(N)$ の機能とともに損なわれるときの、そうした粒子数条件」にあった。「脚注 1」および文献 [1] を参照のこと。

¹³マイクロ世界とか超マイクロ世界とかの‘世界’とは、時空間の2点間の差分を言い表している。超マイクロ世界の差分は微分（differential）で表現される。数学で表す微分の無限小は無限分割の対象であるのに対して、物理学で表す微分の無限小は最小単位を有する。 p - V 線図と T - S 線図の中の dp , dV や $dS (= \delta q_{\text{rev}}/T)$ が熱力学的な最小単位であり、時間の最小単位では、熱力学時間以外に少なくとも量子論における Planck 時間（ $\sim 10^{-44}\text{s}$ ）の存在が広く一般に認識されている [1]。

中心にして、認識されることになる。この考え方に従えば

$$T\Delta_{(t)}S = \Delta_{(t)}N \cdot kT = (1/2)kT = TdS = \delta q_{\text{rev}}$$

が成立するとともに、 p - V 線図内の等温線は“熱力学的無限小の幅”を有して

$$pdV = Vdp = \delta q_{\text{rev}}$$

が同時に成立する。このように、時間概念を遠ざけた“数学操作に基づく可逆性 (reversibility)”を基本要素とする準静的過程 (quasistatic process) が、熱力学的微分要素 dp , dV , dS によって記述できることを再確認した。この記述が Fig. 6 の結果と主張に基づき、それが“熱力学的に意味を成す最少の粒子数 ($N = 5-6$)”と同時に表現し得たことを認識すれば、

- ・ 熱力学時間と準静的過程の関係は、切り離せず“表裏一体の関係”にある
 - ・ 準静的過程は、微分操作に関係していて、熱力学時間の生成根拠となる「超マイクロ世界」に存在する
 - ・ マクロ世界における熱力学時間は、Planck 時間とは別の形式の“時間の最小単位”として扱われる
- の理解が進む。

4.2 時間反転対称性と空間反転対称性

本節の話題に関係した参考情報を挙げておく [6][7]。「脚注 6」で記述した内容は、本節の予告編でもあった。それは、本節後半で詳述される。

Fig. 5(b) の周辺で説明された「時間反転対称性」を含む“分子間で観測される衝突現象”が、物理学で一般に扱われる「時間反転操作」や「空間反転操作」の概念を用いてどのように表現されるかを、Fig. 7 に示す。

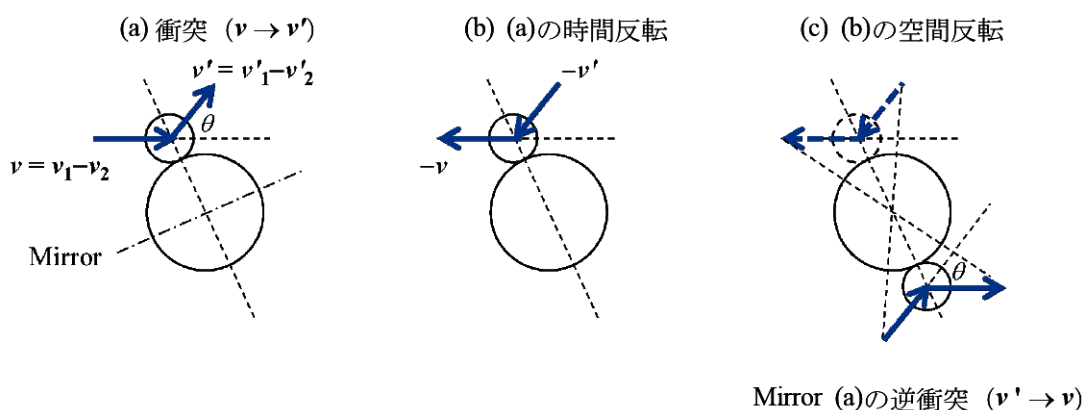


Fig. 7 Time-reversal symmetry and parity symmetry.

Fig. 7 では、大小 2 つの粒子 (小粒子#1 と大粒子#2) のそれぞれの速度を大粒子#2 が停止していると表現されるように、小粒子#1 の相対速度が v に変換されて、その相対速度が弾性衝突の末に v' に変化すると想定する。このように 2 粒子の動きを表現すれば、「時間反転操作」と「空間反転操作」を駆使した“マイクロ世界での粒子弾性衝突現象の記述”が可能になる。ただし、その記述に従う限り、Fig. 7 の中のいずれの反転操作も“対称性の破れ”の問題とは全く無関係に、“物理学が主張するところの「時間

反転対称性」と「マイクロ領域で鏡を使った空間反転対称性」の操作特性”が単に解説されているに過ぎない¹⁴。

以上のような考察を踏まえて、「脚注6」を振り返る。

ここで我々が気を付けなければならない点は、<時間反転操作 $t \rightarrow -t$ >による“速度 $dl/dt = v$ の $v \rightarrow -v$ ”が、正味の<時間反転 $t \rightarrow -t$ >すなわち「時間の矢 (Arrow of time) の反転現象」を説明するに足る事実なのか、あるいは単に「時間反転の“操作特性”」を説明しているだけなのかを識別しなければならない課題についてである。

この課題設定に対する本報の回答は、前節で考察した結論：

分子衝突現象は、それに要する時間が“熱力学時間 ($\sim 10^{-23}$ s)”を上回って、よりマクロ的であるという認識の中に現れていて、「分子衝突はマイクロ現象ながら、その時間の流れはマクロ世界と同様に“時間の矢”に従っている」との結論を、本報は支持している。

さらに、Fig. 2で解説した“粒子速度点の存在確率線密度定数 a ”に関する「1軸 (正・負) 両方向の確率振動 “ $v \rightarrow -v \rightarrow v$ ” が実質の<空間反転 $l \rightarrow -l$ >を支持して<時間反転 $t \rightarrow -t$ >を遠ざけている」といった解釈は、本報が支持する“時間の非対称性 (時間の矢)”の概念をより強固なものにしている。この概念のイメージ図は、Fig. 5(b)の中にある。縦軸の (正・負) 振動 ($\pm v_x$) は、時間軸とは独立の空間 ($\pm l$) に依存して速度点プロットを決め、そのプロットは時間の流れに従っている。時間軸は“時間の非対称性 (時間の矢)”の概念を守り、その矢は一方方向にだけ延びているということである。ただし、Fig. 5(b)を使ったこのような説明は、第3章を解説するために同図を作図した最初の意図とは明らかに異なる。

この認識の違いは、マクロ世界からマイクロ世界へと向かう途上、数学的境界条件を求める目的の、多次元速度分布から1次元正規分布 (Eq. 9およびEq. 10参照) が現れるときに顕在化したと言える。自然現象が要求する条件によって定まる“正規分布 (確率密度関数)”は客観的な量であり [8]、実在する。それは、「Fig. 2が表現するところの粒子数に依存した縦軸内の中心極限 a (Eq. 11に示す実在の確率線密度) が、系内のエネルギーに従い“比率を表す Boltzmann 因子 (縦軸)”と“不確定的な振動を伴った拡がり (横軸)”の組み合わせで分布する」そのような形式で表現される。「なぜ正規分布なのか？」の問いに対しては、「その世界は、“Maxwellの仮定”に依拠した結果として、ある種量子論の不確定性に似た特性 [9] の“確率振動”を同分布の横軸に持つため」と答えるより他ない。“Maxwellの仮定”は彼が導入した分子的混沌という概念に基づくが、本報ではその表現に代えて、“(注目した1粒子速度点の) 確率振動 (確率論的乱雑さ)”なる表現を採用した。注目1粒子を系内の同種他粒子に置き換えたとしてもその速度点確率振動の大きさ (横軸) に変わりはない。正規分布の起源を取り纏めた資料 [10] は、参照に値する。

4.3 粒子減数化の存在確率線密度定数

Maxwell分布由来の“粒子の存在確率線密度定数 a ”は、状態方程式 $pV = NkT$ を適用して

$$a = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = \sqrt{\frac{Nm}{2\pi pV}} \quad (11')$$

と表される。粒子数を極限ゼロ ($N \rightarrow 0$) に近づけると、エネルギーも極限ゼロに近づく ($pV \rightarrow 0$) から、定数 a は不定となり、その極限ゼロ ($a \rightarrow 0$) を含む不確かな存在となる (「脚注4」参照)。Maxwell分布を分布させる“源”を危うくするそうした様子は、 $pV \rightarrow 0$ など“エネルギーを極限ゼロに近づける”第1報 (Eq. 39) の表現：

¹⁴これら操作特性は“対称性の破れを扱う素粒子世界”を考察する上に重要であるが、分子衝突を扱う物理世界におけるそれらの役立ちは小さい。

$$U = G = H = F \quad (\rightarrow 0) \quad (14)$$

に結び付く。この表式が極限表現 ($N \rightarrow 0$) を伴って可能になる根拠は、化学ポテンシャル μ :

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{p,T} = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial H}{\partial N} \right)_{S,p} \quad (15)$$

にあった [4]。

5 おわりに

Maxwell 分布に正規分布が現れる所以は、Maxwell が概念導入した“分子的混沌”にあり、それを著者は確率振動と称して正規分布の横軸で表した。その結果、「マクロ世界で一方向に時間が流れる“時間の矢”概念は、分子衝突レベルのミクロ世界でも健全である」ことを、本報は結論づけた。

“粒子速度点の存在確率線密度定数 a ”とその分布への正しい理解、すなわち、自然現象が正規分布に従うことの本質的理解が、上述した結論に最も直接的に結び付いていることを紹介した (補遺参照)。この結論には既存学説には馴染まない主張が多々含まれるものの、それでもそれらは Maxwell 分布への理解を促す解説要素にもなり得て、本報は、そのような著者主張について、全体として読者に問い掛ける形式を取った。また、この定数 a のゼロ方向への極限処理は、第 1 報で著者主張の傍証に用いた化学ポテンシャル μ を再び登場させることへとつながり、著者主張を通じた“本報と第 1 報および第 2 報との結び付き”をより強める結果となった。

本報に記載した結論を含む一連の考察は、“熱力学的無限小の幅を有する等温線”の概念を全面に打ち出した「ミクロ世界への理論拡張を目指した“新領域・熱力学”」の理論構築に向けて有効であり、その理論展開と医・工学利用を含めた応用展開が、今後に期待される。

補遺

本会報へ寄稿を始めてから、本報は 3 度目となる。3 報ともそれぞれに多くの主張を含むが、その中から基本的な主張を抜き出すことにより、“本報 (第 3 報) を公表する目的”を明確にすることができる。

第 1 報で「準静的過程の数理科学的評価のためには“熱力学的無限小の幅を有する等温線”の概念が不可欠」なこと、第 2 報で「ゼノンのパラドックスを題材に極限概念の基本事項を再確認した上で、時間分割の途上に現れる数学操作的な可逆過程 (熱力学における準静的過程) が、マクロ視点で時間の最小単位となる熱力学時間の導出に結び付く」ことを明示した。一般物理学が時間概念を多面的に表現 [時間の矢、時間の非対称性 (不可逆性) や時間反転対称性など] する中であって、Prigogine が概念を提出し第 2 報が数値・定義づけた“熱力学時間”を間接的にはあっても検証し、時間概念を包括的に理解することの必要性が認識された。その理解には困難を伴い、本報はそうした取り組みへのチャレンジであった。

分子衝突現象に注目するとき、極限研究の主対象である“時空間”の時間ないしは空間が“速度 $dl/dt = v$ 反転 $v \rightarrow -v$ ”の概念成立に関係していることに気付かされる。より正確に言えば、<時間反転 $t \rightarrow -t$ > か <空間反転 $l \rightarrow -l$ > のいずれか一方の実動 (実質の反転動作) のみが、その概念成立に関係している。反転が本当に操作ではなく実動であるなら、両者のうちのいずれか一方のみが選択されるとの考え方は、恐らく正しい。それでは、そのことの検証を可能にする手段は何か? それを見つけることはできるのか?

その発見は、想定外の観点、すなわち著者が熱力学時間の存在を前提に傍証知見の獲得を目指して“Maxwell の速度分布”に向き合っている最中に見出された。その端緒は、“粒子速度点の存在確率線密度”が単に傍証ではなく直接的な証拠になり得ること、すなわち「定数 a を中心とした実動反転“確率振動”の由来が <時間反転 $t \rightarrow -t$ > ではなく <空間反転 $l \rightarrow -l$ > の方にある」ことを認識できたこ

とにあった¹⁵。分子的混沌の考えに依拠した<空間反転 $l \rightarrow -l$ >“確率振動”に対しては、操作ではないので「鏡を当てる行為」¹⁶は排除されて、「確率表現が実空間を創る」といった“古典粒子に対する(正規分布的な)実質を伴う概念”の方が選択されることになった。

以上の要点を再確認する。“確率振動(分子的混沌とほぼ同義)の概念がMaxwell分布にとり不可欠である”ことと、“自然現象に起因する正規分布には実体がある”との両者主張が協力して、上述した結論を力強く導くことができたと言える。

著者が本会報に提出した3報は、それぞれに独立した“既存学説とは異なる自己主張”を発信するとともに、他の2報を補強する“その他の主張”を併せ持っており、結果として3報全体を通じた著者主張「ミクロ領域への熱力学理論の拡張」を情報発信することができた。その基本的考え方は、“自然科学に対する数理科学的な配慮”に表れていて、本報の場合に

Maxwell速度分布式に向けられた“その抜本的理解”を促す同上の配慮

が、企図した‘チャレンジ’へとつながる一定の成果：

“時間の矢”概念の直接的理解 および 熱力学時間に対する概念補強¹⁷

に結実した。

本報を書き終えるに際しての著者の感想は、「LoschmidtにH定理を批判されたBoltzmannは、その後の答弁[3, 9, 11]で、自身の自己主張を十二分に伝えていた」との印象を強くしたことである。

参考文献

- [1] 明星 稔, 国際数理科学協会会報, No.99, 2016. <http://www.jams.or.jp/kaiho/kaiho-99.pdf>
- [2] 広江克彦, 統計力学(マクスウェルの速度分布), 2000-2016. <http://eman-physics.net/statistic/maxwell11.html>
- [3] 原島 鮮, 「熱力学・統計力学(改訂版)」, 培風館, 1981.
- [4] 明星 稔, 国際数理科学協会会報, No.97, 2016. <http://www.jams.or.jp/kaiho/kaiho-97.pdf>
- [5] M.Myojo, The 15th International Symposium on the Science and Technology of Lighting (LS15), Kyoto Univ., 2016.
- [6] 田崎秀一, 「カオスから見た時間の矢—時間を逆にたどる自然科学はなぜ見られないか」, 講談社(ブルーバックス), 2000.
- [7] 藤原邦男, 兵頭俊夫, 「熱学入門—マクロからミクロへ」, 東京大学出版会, 1995.
- [8] 武藤 徹, 「統計・確率のはなし」, 新日本出版社, 1982.
- [9] 風間洋一, 「物理はいかに考えられたか」, 岩波書店, 1990.
- [10] 椎名乾平, 日本心理学会第75回大会, 数理・統計1AM038, 2011. <http://www.psych.or.jp/meeting/proceedings/75/contents/poster/pdf/1AM038.pdf>
- [11] 物理学史研究刊行会 編, 「物理学古典論文叢書5 気体分子運動論」, 東海大学出版会, 1971.

¹⁵もし2つの実動反転を同時に認めてしまえば、“速度 $dl/dt = v$ の無反転 $v \rightarrow v$ ”すなわち、「物質粒子のゆらぎも確率振動もない世界」ひいては「物質は最初から存在していなかった」という結論を受け容れることになってしまう。“振動の無反転 $v \rightarrow v$ ”は無振動 $v_x = 0$ にて、Eq. 12の極限定数 a (イメージ)を設けることはできても、“Fig. 2で表す横軸の実体はなく、本当は定数 a の極限を取る行為も儘ならない”ということである。その結果、“空間の拡がり(自然現象としての正規分布)”を主張するための<空間反転 $l \rightarrow -l$ >が実動として必須であるならば、もう一方の<時間反転 $t \rightarrow -t$ >を実動として認める訳にはいかないとの結論、すなわち、「時間は“時間の矢”よろしく一方向に流れているだけ」という結論が導かれる。

¹⁶Fig. 7を参照すれば分かるように、「鏡を当てる行為」には時間反転操作が含まれる。

¹⁷熱力学的な全微分条件($dV \neq 0, dV \neq 0$ かつ $dVdp = 0$)を守ることでできないマクロ的现实世界($\Delta V \Delta p > 0$)では、熱力学第2法則(エントロピー増大則)とともに“時間の矢”概念が顕在化する。熱力学的無限小(有限最小)の幅を有する等温線を基準にした“状態量の動作点移動”に係る時間概念は、熱力学時間を最小単位として表されることになる。動作点移動が等温線内に留まって可逆動作する“準静的過程”は、「ゆっくり」といった表現に代表される時間概念を有さず、どちらかと言えば(全微分条件に従った)数学的操作に近い。